وزارة التربية والتعليم المصرية

الرياضيات

كتاب الطالب

الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الأول







الرياضيات
الصف الأول الثانوى
الفصل الدراسى الأول

الرياضيات

كتاب الطالب

الصف الأول الثانوى الفصل الدراسى الأول



للرياضيات تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم.

والصورة لكوبرى السلام الذى يربط بين ضفتى قناة السويس

إعداد

أ/ عمر فؤاد جاب الله

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح　　أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ.م.د/ عصام وصفى روفائيل　　أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ كمال يونس كبشة

جميع الحقوق محفوظة لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر

ش.م.م

SAKKARA PUBLISHING

الطبعــة الأولى ٢٠١٣/ ٢٠١٤

رقم الإيــداع ٧٩٤٧ / ٢٠١٣

الرقم الدولى 978 - 977 - 706 - 001 - 1

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذه الكتب هى مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات فى حياته اليومية, والتى تساعده على المشاركه فى المجتمع.

٢ التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتى والتعلم النشط والتعلم التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

٣ تقديم رؤى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع(STS) تعكس دور التقدُّم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرُّف الواعى الفعّال حِيال استخدام الأدوات التكنولوجية.

٤ تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراستها وتقدير علمائها.

٥ تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.

٦ الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التلقينى؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التى تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تحقق من فهمك».

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

خريطة الكتاب للفصل الدراسى الأول

اسم الوحدة	الدروس المتضمنة بالوحدة	المفاهيم المتضمنة	العمليات العقلية والمهارات الذهنية المتضمنة	الترابط والتداخل مع العلوم الأخرى والحياة العلمية
١ الجبر والعلاقات والدوال	١ - ١ : حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد	معادلة - علاقة - دالة - عامل	تفكير ناقد صـ٦ حل المشكلات صـ٦ تفكير جبرى (أثناء عرض الدرس)	الربط بالفيزياء صـ ٦ الربط بالرياضية صـ ٦
	١ - ٢ : مقدمة عن الأعداد المركبة	عدد تخيلى - عدد مركب	تفكير ناقد صـ٩، ١١، ١٢ تفكير جبرى (أثناء عرض الدرس)	الربط بالتكنولوجيا صـ ٧ الربط بالكهرباء صـ ١٢
	١ - ٣ : تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية	جذر - مميز - معادلة	تفكير ناقد صـ١٥ حل المشكلات صـ ١٥ تفكير جبرى (أثناء عرض الدرس)	الربط بالصحة صـ ١٥
	١ - ٤ : العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها	مجموع جذرين - حاصل ضرب جذرين	تفكير شفهى صـ١٦ تفكير ناقد صـ ١٩ تفكير جبرى (أثناء عرض الدرس)	
	١ - ٥ : بحث إشارة الدالة	إشارة دالة - دالة موجبة - دالة سالبة	تفكير منطقى صـ ٢٠، ٢١، ٢٢ تفكير جبرى (أثناء عرض الدرس)	
	١ - ٦ : حل متباينات الدرجة الثانية فى متغير واحد	متباينة	تفكير منطقى صـ ٢٦ تفكير ناقد صـ ٢٧ تفكير جبرى (أثناء عرض الدرس)	
٢	٢ - ١ : تشابه المضلعات	تشابه - مضلعات متشابهة -مثلثات متشابهة - أضلاع متناظرة - زوايا متطابقة	تفكير منطقى تفكير استدلالى تفكير هندسى (أثناء عرض الدرس)	الربط بالفن صـ ٤١ تطبيقات حياتية صـ ٤١
	٢ - ٢ : تشابه المثلثات	تشابة - تشابه المثلثات - بديهية	تفكير منطقى تفكير استدلالى تفكير هندسى	الربط بالفيزياء صـ ٤٧
	٢ - ٣ : العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين	محيط - مساحة- مساحة مضلع- أضلاع متناظرة	تفكير منطقى تفكير استدلالى تفكير هندسى (أثناء عرض الدرس)	الربط بالجغرافيا صـ٥٥ الربط بالزراعة صـ ٥٨
	٢ - ٤ : تطبيقات التشابه فى الدائرة	وتر - قاطع - مماس - قطر - مماس خارجى مشترك - مماس داخلى مشترك	تفكير منطقى تفكير استدلالى تفكير هندسى (أثناء عرض الدرس)	الربط مع الجيولوجيا صـ٦٤ الربط بالصناعة صـ ٦٥ الربط مع هندسة الطرق صـ ٦٥ الربط مع الفضاء صـ ٦٥

اسم الوحدة	الدروس المتضمنة بالوحدة	المفاهيم المتضمنة	العمليات العقلية والمهارات الذهنية المتضمنة	الترابط والتداخل مع العلوم الأخرى والحياة العلمية
٣ نظريات التناسب فى المثلث	٣ - ١: المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبه	توازى - منصف - متوسط - قاطع	• تفكير منطقى – تفكير استدلالى تفكير هندسي (أثناء عرض الدرس) • النمذجة الرياضية صـ ٧٦ • حل المشكلات صـ ٨٠ • تفكير ناقد صـ ٨٠ • البرهان بالمخططات (البرهان التسلسلى) صـ ٧٦	مكافحة التلوث صـ ٧٧ الربط بالإنشاءات صـ٨٠ الربط بالصناعة صـ ٨٠
	٣ - ٢: منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة	منصف - منصف داخلى - منصف خارجى - تعامد	• تفكير منطقى – تفكير استدلالى تفكير هندسي (أثناء عرض الدرس) • تفكير ناقد صـ ٨٣ • حل المشكلات صـ ٨٦	الربط بالفن صـ ٤١ تطبيقات حياتية صـ ٤١
	٣ - ٣: تطبيقات التناسب فى الدائرة	قوة - نقطة - دائرة - وتر - مماس - قاطع - قطر - دوائر متحدة المركز - مماس خارجى مشترك - مماس داخلى مشترك	• تفكير منطقى – تفكير استدلالى تفكير هندسي (أثناء عرض الدرس) • حل المشكلات صـ ٩٣	الربط بالأقمار الصناعية صـ ٩٢
٤ حساب المثلثات	٤ - ١: الزاوية الموجهة	قياس ستينى - زاوية موجهة - وضع قياسى - قياس موجب - قياس سالب - زاوية مكافئة	• تفكير ناقد. صـ٩٩ • تفكير شفهى. صـ٩٩	الربط بالرياضية صـ ١٠٢
	٤ - ٢: وحدات قياس الزاوية	قياس ستينى - قياس دائرى - زاوية نصف قطرية (راديان)	• تفكير ناقد صـ١٠٦	الربط بالتكنولوجيا صـ١٠٦ الربط بالفضاء صـ١٠٧ الربط بالرياضة صـ١٠٧ الربط بالصناعة صـ١٠٧
	٤ - ٣: الدوال المثلثية	دالة مثلثية - جيب - جيب تمام - ظل - قاطع - قاطع تمام - ظل تمام	• تفكير ناقد. صـ١١٣	
	٤ - ٤: العلاقة بين الدوال المثلثية	زوايا متنسبة	• تفكير ناقد. صـ١١٥	
	٤ - ٤: التمثيل البيانى للدوال المثلثية	دالة الجيب - دالة جيب التمام - قيمة عظمى - قيمة صغرى		الربط بالفيزياء صـ ١٢٢
	٤ - ٤: إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية	دالة مثلثية	• تفكير ناقد. صـ١٢٤	الربط بالتكنولوجيا صـ١٢٣ الربط بالرياضة صـ١٢٤ الربط بالسيارات صـ١٢٤

المحتويات

الوحدة الأولى
الجبر والعلاقات والدوال

١-١ حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد ٤

١-٢ مقدمة عن الأعداد المركبة ٩

١-٣ تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية ١٥

١-٤ العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها ١٨

١-٥ إشارة الدالة ٢٢

١-٦ متباينات الدرجة الثانية ٢٧

ملخص الوحدة ٣٠

الوحدة الثانية
التشابه

٢-١ تشابه المضلعات ٣٤

٢-٢ تشابه المثلثات ٤٠

٢-٣ العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ٥٠

٢-٤ تطبيقات التشابه فى الدائرة ٥٨

ملخص الوحدة ٦٧

الوحدة الثالثة
نظريات التناسب فى المثلث

٣ - ١ المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة ٧٠

٣ - ٢ منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة ٧٩

٣ - ٣ تطبيقات التناسب فى الدائرة ٨٦

ملخص الوحدة ٩٢

الوحدة الرابعة
حساب المثلثات

٤ - ١ الزاوية الموجهة. ٩٦

٤ - ٢ وحدات قياس الزاوية. ١٠٢

٤ - ٣ الدوال المثلثية. ١٠٦

٤ - ٤ العلاقة بين الدوال المثلثية ١١٢

٤ - ٥ التمثيل البيانى للدوال المثلثية ١١٩

٤ - ٦ إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية ١٢٢

ملخص الوحدة ١٢٤



الوحدة ١

الجبر

الجبر والعلاقات والدوال

Algebra, Relations and Functions

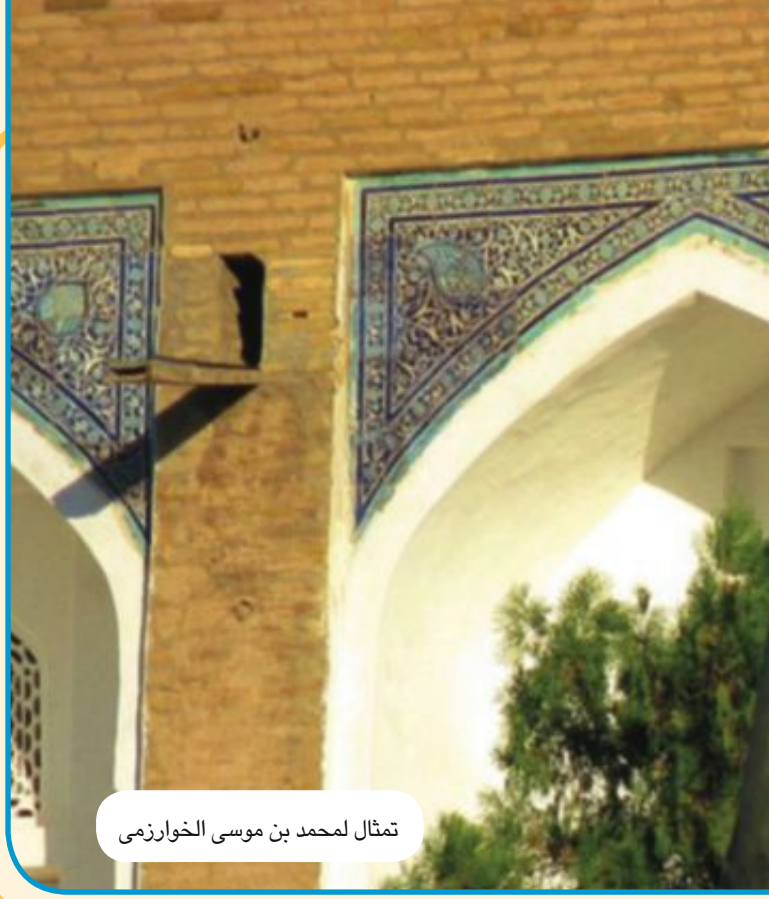
أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يحل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًا وبيانيًا.
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جَذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- يكون معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث إشارة المقدار الجبرى.
- يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب، قوى ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوى عددين مركبين).
- يحل متباينات من الدرجةالثانية فى مجهول واحد.

المصطلحات الأساسية

معادلة	Equation	مميز المعادلة	Discriminant of the Equation	عدد مركب	Complex Number
جذر المعادلة	Root of the Equation	إشارة دالة	Signal of a function	عدد تخيلى	Imaginary Number
معامل الحد	Coefficient of a Term			قوى العدد	Powers of a Number
				متباينة	Inequality



تمثال لمحمد بن موسى الخوارزمى

دروس الوحدة

الدرس (١ – ١): حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد.

الدرس (١ – ٢): مقدمة عن الأعداد المركبة.

الدرس (١ – ٣): تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.

الدرس (١ – ٤): العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.

الدرس (١ – ٥): إشارة الدالة.

الدرس (١ – ٦): متباينات الدرجة الثانية.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية – ورق مربعات – حاسب آلى – برامج رسومية – بعض المواقع الإلكترونية مثل:

www.phschool.com

نبذه تاريخية

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمى (القرن التاسع الميلادى فى عصر الخليفة العباسى المأمون) فى كتابه الذى ألفه، وكان عنوانه «الجبر والمقابلة»، والذى وضع فيه طرقًا أصيلة لحل المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمى هو مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءًا من الحساب. وقد تُرجِم الكتاب إلى اللغات الأوربية بعنوان «الجبر» ومنها أخذ كلمة «الجبر» (algebra).

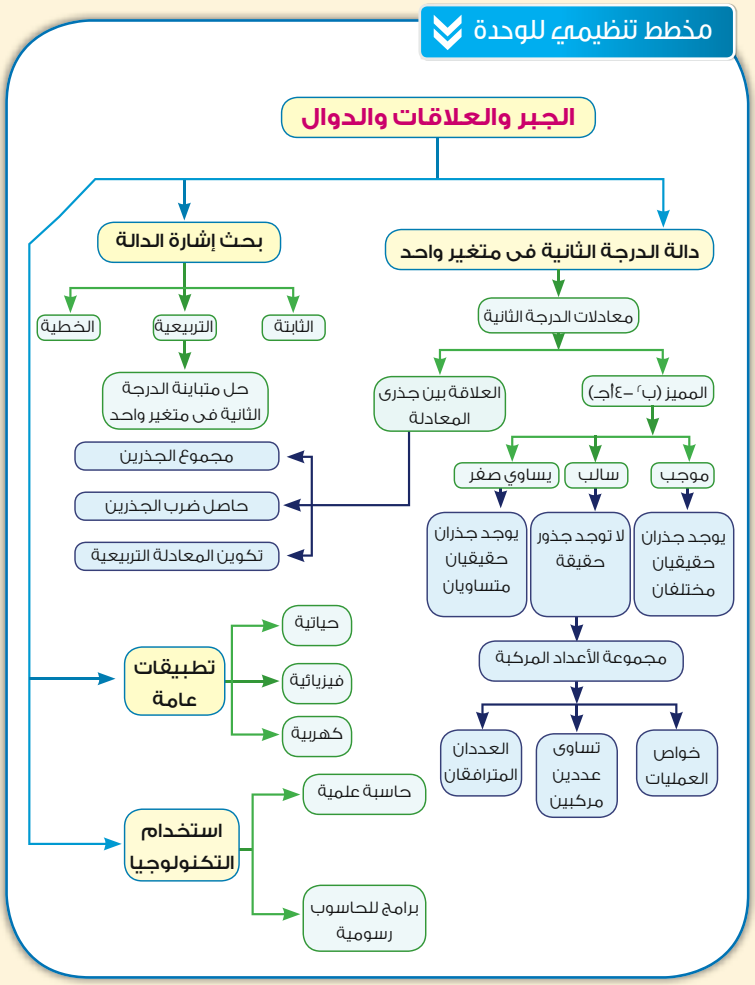
والجذر هو الذى نرمز له حاليًا بالرمز س (إشارة إلى حل معادلة الدرجة الثانية) وقد وضع الخوارزمى حلولًا هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية التى تتفق مع طريقة إكمال المربع. واشتغل كثير من العلماء العرب بحل المعادلات، ومن أشهرهم عمر الخيام الذى اهتم بحل معادلات الدرجة الثالثة.

وجدير بالذكر أنه ظهر فى بردية أحمس (١٨٦٠ ق.م) بعض المسائل التى يشير حلها إلى أن المصريين فى ذلك الحين قد توصلوا إلى طريقة لإيجاد مجموع المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية.

وقد وصل علم الجبر حاليًا إلى درجة كبيرة من التطور والتجريد؛ فبعد أن كان يتعامل مع الأعداد أصبح يتعامل مع كيانات رياضية جديدة مثل: المجموعات، والمصفوفات والمتجهات وغيرها.

والأمل معقود عليكم – أبناءنا الطلاب– فى استعادة مجدنا العلمى فى عصوره الذهبية المصرية الفرعونية والعصور الإسلامية، والتى حمل علماؤنا فيها لواءَ التقدم ومشاعلَ المعرفة إلى العالم شرقًا وغربًا.

مخطط تنظيمي للوحدة



حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد

Solving Quadratic Equations in One Variable

١ - ١

سوف تتعلم

- مفهوم المعادلة الجبرية ذات المتغير الواحد.
- التمييز بين المعادلات والعلاقات والدوال.
- حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًّا وبيانيًّا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

معادلة	Equation
علاقة	Relation
دالة	Function
عامل	Factor
معامل	Coefficient

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- ورق رسم بيانى

فكر و ناقش

سبق أن درست المعادلات الجبرية فى متغير واحد، وفي هذا الدرس سوف تدرس المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية فى متغير واحد.

والآن سوف نستعرض ما سبق لك دراسته من المعادلات الجبرية ذات المتغير الواحد.

١- تسمى المعادلة: أ س + ب = ٠ حيث أ ≠ ٠ بأنها معادلة من **الدرجة الأولى فى متغير واحد هو س** (لأن أعلى أس فيها للمتغير س هو العدد ١)

٢- تسمى المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ معادلة من **الدرجة الثانية فى متغير واحد هو س** (لأن أعلى أس فيها للمتغير س هو العدد ٢)

وعلى ذلك فالمعادلة: ٢س^{٣} – ٣س^{٢} + ٥ = ٠ تسمى معادلة من الدرجة الثالثة. (لأن أعلى أس فيها للمتغير س هو ٣).

المعادلات والعلاقات والدوال

Equations, relations and functions

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية جبريًّا كالتالى، بطريقتين:

أولًا: بتحليل المقدار أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ، ب، جـ ∋ ح، أ ≠ ٠ (إذا كان ذلك ممكنًا فى ح).

ثانيًا: باستخدام القانون العام، ويكون جذرا المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$ حيث أ معامل س^{٢}، ب معامل س، جـ الحد المطلق.

والآن سوف تدرس حل معادلة الدرجة الثانية بيانيًّا.

تعلم

حل معادلة الدرجة الثانية بيانيًّا

Solving quadratic equation graphically

مثال

(١) **حل المعادلة:** س^{٢} + س – ٦ = ٠ بيانيًّا، ثم تَحقَّقْ من صحة الحل.

الحل

لحل المعادلة س^{٢} + س – ٦ = ٠ بيانيًّا نتبع الآتي:

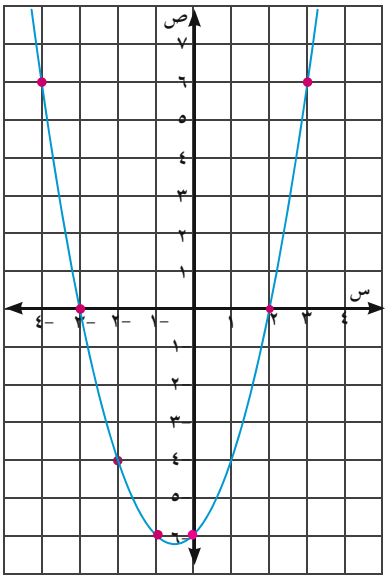
★ نرسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = س^{٢} + س – ٦

★ نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، فتكون هى مجموعة حل المعادلة.

لرسم الدالة د (س) = ص، ص = س^{٢} + س – ٦

ننشىء جدولًا لبعض قيم س، ثم نوجد قيم ص المناظرة لها كالآتي:

س	–٤	–٣	–٢	–١	٠	١	٢	٣
ص	٦	٠	–٤	–٦	–٦	–٤	٠	٦



★ نعين هذه النقاط فى المستوى الإحداثى المتعامد، ونصل بينهما بمنحنى كما فى الشكل المجاور.

ومن الرسم نجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات وهى س = – ٣، س = ٢ وبذلك تكون مجموعة حل المعادلة س^{٢} + س – ٦ = ٠ هى {–٣، ٢}.

يمكنك استخدام الحل الجبرى لكى تطابقه مع الحل البيانى كالآتى:

المعادلة: س^{٢} + س – ٦ = ٠

تحليل المقدار الثلاثى: (س + ٣)(س – ٢) = ٠

إما س + ٣ = ٠ أو س – ٢ = ٠

أى س = –٣ أو س = ٢ مجموعة الحل هى {– ٣، ٢}

تذكر

إذا كان أ، ب أعدادًا حقيقية

وكان أ × ب = ٠

فإن: أ = ٠ أو ب = ٠

التحقق من صحة الحل:

عندما س = – ٣: الطرف الأيمن للمعادلة = (– ٣)^{٢} + (– ٣) – ٦

= ٩ – ٣ – ٦ = ٠ (الطرف الأيسر)

س = – ٣ تحقق المعادلة.

عندما س = ٢ : الطرف الأيمن للمعادلة = (٢)^{٢} + (٢) – ٦

= ٤ + ٢ – ٦ = ٠ (الطرف الأيسر)

س = ٢ تحقق المعادلة.

لاحظ أن:

١ - فى التمثيل البيانى للعلاقة السابقة ص = س^{٢} + س – ٦

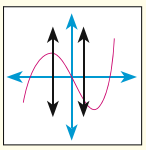
- العلاقة تمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة.
- المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المدى هو [– ٦$\frac{١}{٤}$، ∞[

٢ - للتعبير عن الدالة يستخدم الرمز د(س) بدلًا من ص، ويُقرأ دالة س.

اضف إلى معلوماتك

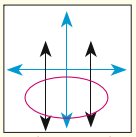
اختبار الخط الرأسي

Vertical line test



دالة

الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة فقط



ليست دالة

الخط الرأسى يقطع المنحنى فى نقطتين أو أكثر

استخدام الآله الحاسبة العلمية:

يمكن تكوين الجدول السابق مباشرة باستخدام الآلة الحاسبة العلمية على النحو الآتى:

١- تهيئة الحاسبة على نظام (Table)، وذلك بالضغط على المفاتيح

إبدأ ← Mode 7 TABLE

٢- إدخال البيانات: نكتب قاعدة الدالة السابقة، وذلك بالضغط على المفاتيح التالية:

إبدأ ← ALPHA) (X) x^2 + ALPHA) (X) − 6

٣- نضغط على المفتاح = ثم نكتب فى بداية الفترة START? -4 ثم نضغط =

٤- ثم نكتب فى نهاية الفترة END الرقم 3 ثم نضغط = نحدد بعد ذلك طول الفترة STEP ونكتب الرقم 1 ثم نضغط =

٥- يتم إنشاء الجدول فى الحاسبة، ويمكن التنقل باستخدام المفتاح (REPLAY) إلى أعلى و إلى أسفل.

	X	F(X)
1	-4	6
2	-3	0
3	-2	-4
4	-1	-6
5	0	-6
6	1	-4
7	2	0
8	3	6

للخروج من البرنامج: نضغط إبدأ ← Mode 1

تفكير ناقد: **١-** هل كل دالة علاقة؟ فسِّر ذلك بأمثلة.

٢- هل يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات؟ فسِّر ذلك.

حاول أن تحل

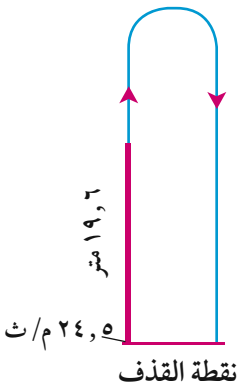
(١) مثل العلاقة ص = س^{٢} − ٤ بيانيًّا، ثم أوجد من الرسم مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ٤ = ٠

و إذا كانت ص = د(س) فبيِّن أنَّ د دالة، وحدِّد مجالها ومداها [ناقش معلمك].

مثال

(٢) **الربط بالفيزياء:** أُطْلقت قذيفة رأسيًّا بسرعة ع تُساوى ٢٤,٥ متر/ث. احسبُ الفترة الزمنية ن بالثانية التى تستغرقها القذيفة حتى تصل إلى ارتفاع ف مترًا، حيث ف تساوى ١٩,٦ مترًا، علمًا بأن العلاقة بين ف، ن كالآتى:

ف = ع ن − ٤,٩ ن^{٢}.



الحل

بالتعويض عن: ف = ١٩,٦ متر، ع = ٢٤,٥ مترًا/ث فى العلاقة ف = ع ن − ٤,٩ ن^{٢}

∴ ١٩,٦ = ٢٤,٥ ن − ٤,٩ ن^{٢} **وبقسمة الطرفين على ٤,٩**

∴ ٤ = ٥ن − ن^{٢} **بالتبسيط**

∴ ن^{٢} − ٥ن + ٤ = ٠ **بتحليل المقدار الثلاثى .**

∴ (ن − ١) (ن − ٤) = ٠ **أى أن:** ن = ١ ثانية أو ن = ٤ ثانية.

تفسير وجود جوابين: القذيفة تصل إلى ارتفاع ١٩,٦ مترًا بعد ثانية واحدة، ثم تستمر فى الحركة لأعلى حتى تصل لأقصى ارتفاع، ثم تعود إلى موضع نقطة القذف بعد ٤ ثوانٍ من لحظة إطلاقها.

حاول أن تحل

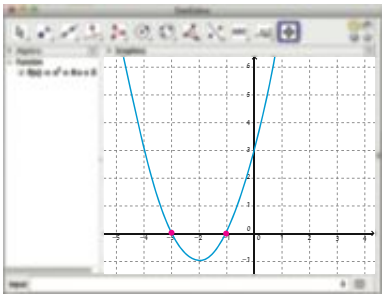
(٢) **الربط بالرياضة:** فى إحدى الألعاب الأولمبية قفز متسابق من منصة ارتفاعها ٩,٨ أمتار عن سطح الماء عاليًا مبتعدًا عنها، فإذا كان ارتفاع المتسابق عن سطح الماء ف مترًا بعد زمن قدره ن ثانية يتحدد بالعلاقة: ف = −٤,٩ن^{٢} + ٢,٤٥ن + ٩,٨ ، فأوجد لأقرب رقمين عشريين متى يصل المتسابق لسطح الماء؟

نشاط

يمكن استخدام بعض البرامج المتاحة التى تدعم اللغة العربية من على شبكة الإنترنت مثل GeoGebra وموقعه هو (http://geogebra.org/coms/)،وبرنامج Graph وموقعه هو (http://www.padowan.dk/) التى من خلالها يمكن رسم منحنى الدالة.

أ يمكن رسم منحني الدالة د حيث

د (س) = س^{٢} + ٤س + ٣

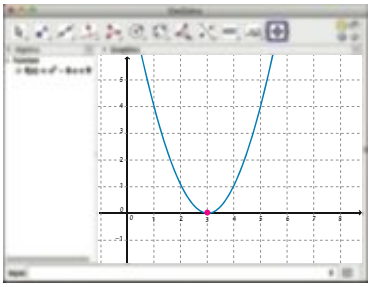


نوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ أى س^{٢} + ٤س + ٣ = ٠

وذلك من خلال تعين الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات، وهى −٣، −١ لتكون حلًا للمعادلة؛

ولذلك يكون هناك حلّان للمعادلة فى ح هما −٣، −١

ب نرسم الدالة د حيث د (س) = س^{٢} − ٦س + ٩



نضع د (س) = ٠ فيكون (س − ٣)^{٢} = ٠

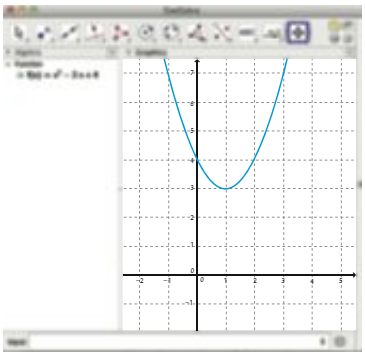
أي س −٣ = ٠ فيكون حل المعادلة س = ٣

ومن الرسم نجد أن رأس المنحنى يمس محور السينات عند س = ٣

وهذا يطابق الحل الجبري؛

لذلك يوجد حل وحيد مكرر للمعادلة فى ح هو ٣

ج نرسم الدالة د حيث د (س) = س^{٢} − ٢س + ٤ ثم نضع د(س) = ٠



فيكون س^{٢} − ٢س + ٤ = ٠

ويتعذر حل هذه المعادلة بالتحليل وعند استخدام القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

بالتعويض عن أ = ١، ب = −٢، جـ = ٤

$$\therefore س = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٤}}{١ \times ٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{-١٢}}{٢}$$

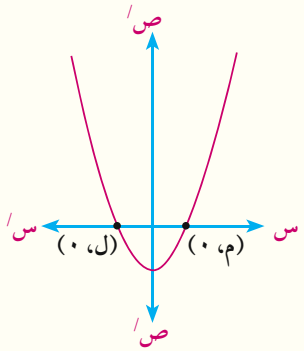
$$= \frac{٢ \pm ٢\sqrt{-٣}}{٢} = ١ \pm \sqrt{-٣} \notin ع$$

لذلك لا توجد حلول حقيقية تُحقق هذه المعادلة، ويؤكد ذلك، رسم الشكل البياني للدالة فنجد أن منحنى الدالة لا يقطع محور السينات فى أي نقطة؛ لذلك فإن مجموعة حل المعادلة فى ع هو ϕ .

نستنتج من النشاط السابق أن :

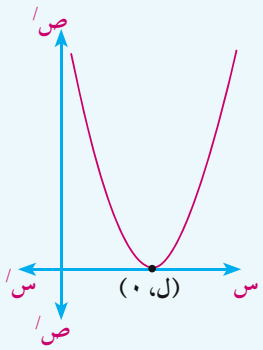
عند حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد توجد ثلاث حالات:

١- المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين.



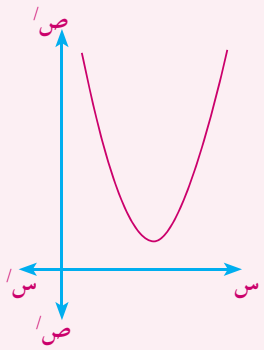
يوجد حلَّان مختلفان للمعادلة فى ع،
مجموعة الحل = {ل، م}

٢- المنحنى يمس محور السينات فى نقطة واحدة.



يوجد حلان متساويان للمعادلة فى ع،
مجموعة الحل = {ل}

٣- المنحنى لا يقطع محور السينات.



لايوجد حلٌّ للمعادلة فى ع،
مجموعة الحل = ϕ

تحقق من فهمك

(١) **حل مشكلات:** إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ +..... + ن) يعطى بالعلاقة جـ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن) فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا ١٣٦

١ - ٢ مقدمة عن الأعداد المركبة

Complex Numbers

سوف تتعلم

- مفهوم العدد التخيلى.
- قوى ت الصحيحة.
- مفهوم العدد المركب.
- تساوى عددين مركبين.
- العمليات على الأعداد المركبة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- عدد تخيلى Imaginary Number
- عدد مركب Complex Number

الأدوات والوسائل

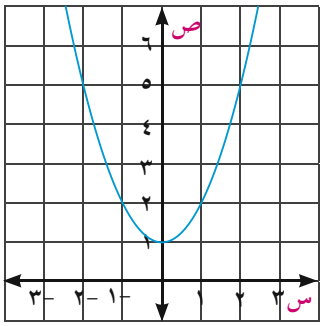
- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

سبق أن درست نُظمًا مختلفة للأعداد، وهى نظام الأعداد الطبيعية "ط" ونظام الأعداد الصحيحة "صـ" ونظام الأعداد النسبية "نـ" وغير النسبية "نـ/" وأخيرًا نظام الأعداد الحقيقية "ع" ورأينا أن أى نظام ينَشأ كتوسيع للنظام الذى يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل فى النظام السابق، وإذا تأملنا المعادلة $س^{٢} = -١$ نجد أنها غير قابلة للحل فى ح، إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى (-١) يحقق المعادلة؛ لذا نحتاج لدراسة مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد المركبة.

يبين الشكل المجاور: التمثيل البيانى للدالة ص = $س^{٢} + ١$ نلاحظ من الرسم أن منحنى الدالة لايقطع محور السينات؛ وبذلك لا يكون للمعادلة $س^{٢} + ١ = ٠$ حلول حقيقية فى ع.

لذا كان من الضرورى التفكير فى مجموعة جديدة للأعداد لحل هذا النوع من المعادلات.



تعلم

العدد التخيلى Imaginary numbers

يعرف العدد التخيلى ت بأنه الجذر التربيعى للعدد (-١) حيث $ت^{٢} = -١$

وتسمى الأعداد التى على الصورة ٢ت، - ٥ت، $\sqrt{٣}$ ت **بالأعداد التخيلية**

لذلك فإن: $\sqrt{-أ} = \sqrt{أ}$ ت (لكل أ ∈ $ع^{+}$)

بذلك نكتب $\sqrt{-٣} = \sqrt{٣}$ ت،

$\sqrt{-٥} = \sqrt{٥}$ ت وهكذا.....

$\sqrt{-٢٤٣} = \sqrt{٣ \times ٢٩ \times (-١)} = ٩\sqrt{٣}$ ت

تفكير ناقد: إذا كان أ، ب عددين حقيقيين سالبين، فهل من الممكن أن يكون $\sqrt{أ ب} = \sqrt{أ}\sqrt{ب}$؟ فسر ذلك بمثال عددى.

قوى ت الصحيحة: Integer powers of i

العدد ت يحقق قوانين الأسس التى سبق لك دراستها، و يمكن التعبير عن القوى المختلفة للعدد ت كالآتى:

$ت^{1} = ت$ ، $ت^{2} = -1$ ، $ت^{3} = ت^{2} \times ت = -ت$

$ت^{4} = ت^{2} \times ت^{2} = -1 \times -1 = 1$ ، $ت^{5} = ت^{4} \times ت = 1 \times ت = ت$

وبوجه عام فإن : $ت^{4ن} = 1$ ، $ت^{4ن+1} = ت$ ، $ت^{4ن+2} = -1$ ، $ت^{4ن+3} = -ت$ حيث ن ∈ صـ

مثال

(٢) أوجد كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

أ $ت^{30}$ ب $ت^{43}$ ج $ت^{-61}$ د $ت^{4ن+19}$

الحل

أ $ت^{30} = (ت^{4})^{7} \times ت^{2} = 1 \times -1 = -1$

ب $ت^{43} = (ت^{4})^{10} \times ت^{3} = 1 \times -ت = -ت$

ج $ت^{-61} = (ت^{4})^{-16} \times ت^{3} = 1 \times ت^{3} = -ت$

د $ت^{4ن+19} = ت^{4ن} \times ت^{19} = 1 \times (ت^{4})^{4} \times ت^{3} = 1 \times ت^{3} = -ت$

حاول أن تحل

(١) أوجد كلًّا مما يأتى فى أبسط صورة:

أ $ت^{24}$ ب $ت^{37}$ ج $ت^{-43}$ د $ت^{-51}$ هـ $ت^{4ن+29}$ و $ت^{4ن+42}$

تعلم

العدد المركب Complex number

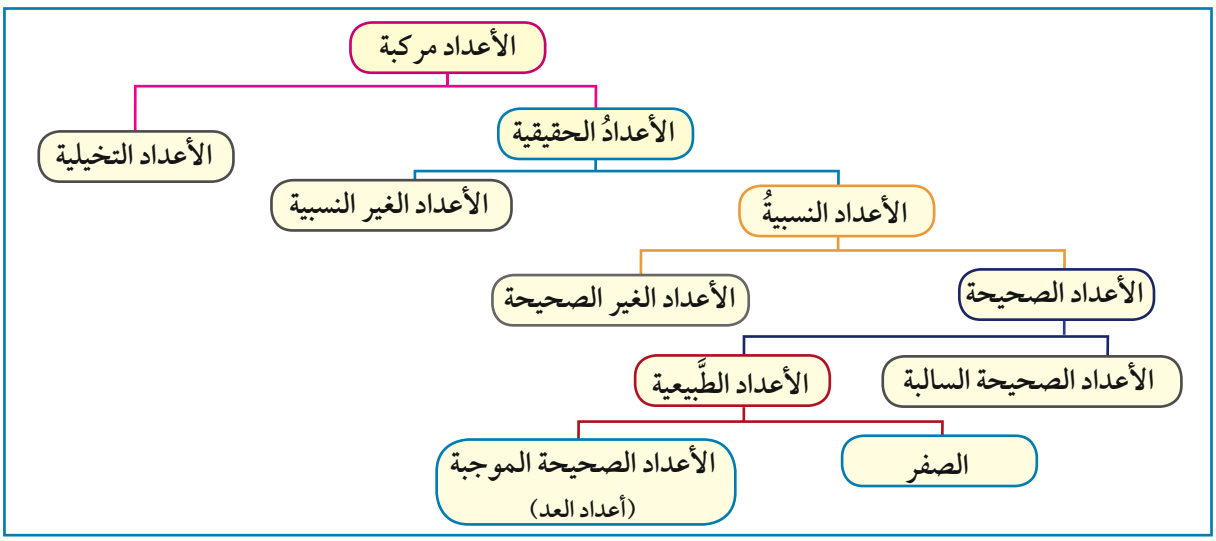
العدد المركب هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت حيث أ، ب عددان حقيقيان.

و يبين الشكل التالى مجموعات الأعداد التى تُشكل جزءًا من نظام العدد المركب.

العدد المركب

أ + ب ت

الجزء الحقيقى — الجزء التخيلى



إذا كان أ، ب عددين حقيقيين فإن العدد ع حيث ع = أ + ب ت يسمى عددًا مركبًا، وتسمى أ بالجزء الحقيقي للعدد المركب ع، ب ت بالجزء التخيلي للعدد المركب ع.

و إذا كانت ب = ٠ فإن العدد ع = أ يكون حقيقيًّا، و إذا كانت أ = ٠ فإن العدد ع = ب ت يكون تخيليًّا.

مثال

(٣) حل المعادلة ٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١

الحل

المعادلة ٩س^{٢} + ١٢٥ = ٦١

٩س^{٢} + ١٢٥ − ١٢٥ = ٦١ − ١٢٥ بإضافة (− ١٢٥) إلى طرفى المعادلة

٩س^{٢} = − ٦٤ بالتبسيط

س^{٢} = $-\frac{٦٤}{٩}$ بقسمة طرفى المعادلة على ٩

س = ± $\sqrt{\frac{-٦٤}{٩}}$ بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

س = ± $\sqrt{\frac{٦٤}{٩}}$ ت = ± $\frac{٨}{٣}$ ت

حاول أن تحل

(٢) حل كلًّا من المعادلات الآتية:

أ ٣س^{٢} + ٢٧ = ٠ ب ٥س^{٢} + ٢٤٥ = ٠ ج ٤س^{٢} + ١٠٠ = ٧٥

تساوى عددين مركبين Equality of two complex numbers

يتَساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان وتساوى الجزآن التخيليان.

إذا كان: أ + ب ت = جـ + ء ت **فإن:** أ = جـ ، ب = ء

مثال

(٤) أوجد قيمتى س، ص اللتين تُحققان المعادلة: ٢س − ص + (س − ٢ص)ت = ٥ + ت حيث س، ص ∋ ع، ت^{٢} = − ١

الحل

بمساواة الجزأين الحقيقين أحدهما بالآخر وكذلك الجزأين التخيليين أحدهما بالآخر

٢ س − ص = ٥ ، س − ٢ ص = ١

بحل المعادلتين ينتج أن س = ٣ ، ص = ١

حاول أن تحل

(٣) أوجد قيمتى س، ص اللتين تُحققان كل من المعادلات الآتية:

أ (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ – ١٢ ت

ب ٢س – ٣ + (٣ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

تعلم

العمليات على الأعداد المركبة Operations on complex numbers

يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، كما توضح ذلك الأمثلة التالية:

مثال

(٥) أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ مما يأتى:

أ (٧ – ٤ت) + (٢ + ت)

ب (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)

الحل

أ **المقدار** = (٧ – ٤ت) + (٢ + ت)

= (٧ + ٢) + (–٤ + ١) ت — باستخدام خاصيتى الإبدال والتجميع

= ٩ – ٣ ت — بالتبسيط

ب **المقدار** = (٢ + ٣ت) (٣ – ٤ت)

= ٢ (٣ – ٤ت) + ٣ت (٣ – ٤ت) — باستخدام خاصية التوزيع

= ٦ – ٨ت + ٩ ت – ١٢ ت^{٢} — بفك الأقواس

= ٦ – ٨ت + ٩ت + ١٢ — حيث ت^{٢} = – ١

= (٦ + ١٢) + (– ٨ + ٩) ت = ١٨ + ت — بالتبسيط

حاول أن تحل

(٤) أوجد فى أبسط صورة ناتج كلٍّ مما يأتى:

أ (١٢ – ٥ت) – (٧ – ٩ت)

ب (٤ – ٣ت)(٤ + ٣ت)

ج (٥ – ٦ت)(٣ + ٢ت)

قسمة الأعداد المركبة Dividing complex numbers

العددان أ + ب ت ، أ – ب ت يسميان بالعددين المترافقين **فمثلًا** ٤ – ٣ت ، ٤ + ٣ت عددان مترافقان، حيث:

$(٤ - ٣ت)(٤ + ٣ت) = (٤)^{٢} - (٣ت)^{٢}$

$= ١٦ - ٩ت^{٢} = ١٦ - ٩(-١) = ٢٥$ **(الناتج عدد حقيقى)**

تفكير ناقد:

هل بالضرورة أن يكون مجموع العددين المترافقين هو دائمًا عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر ذلك.

هل بالضرورة أن يكون حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائمًا عددًا حقيقيًّا؟ فسِّر ذلك.

مثال

٦ أوجد قيمتى س، ص اللتين تحققان المعادلة:

$$\frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٣ + ٤ت} = س + ت ص$$

الحل

$\frac{٤ - ت^{٢}}{٣ + ٤ت} = س + ت ص$	بفك الأقواس
$\frac{١ + ٤}{٣ + ٤ت} \times \frac{٣ - ٤ت}{٣ - ٤ت} = س + ت ص$	بضرب البسط والمقام فى (٣ – ٤ت)
$\frac{٥(٣ - ٤ت)}{٢٥} = س + ت ص$	بالتبسيط
$\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت = س + ص ت$	بتطبيق تساوى عددين مركبين

أى أن: $س = \frac{٣}{٥}$ ، $ص = -\frac{٤}{٥}$

حاول أن تحل

٥ أوجد فى أبسط صورة قيمة كلٍّ مما يأتى:

أ $\frac{٤ - ٦ت}{٢ت}$ ب $\frac{٢٦}{٣ - ٢ت}$

جـ $\frac{٣ - ت}{٢ - ت}$ د $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت}$

مثال

(٧) **كهرباء:** أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازي فى دائرة كهربية مغلقة، إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى ٥ – ٣ت أمبير وفى المقاومة الثانية ٢ + ت أمبير (علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين).

الحل

∵ شدة التيار الكهربى الكلية = مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين.

∴ = (٥ – ٣ت) + (٢ + ت)

= (٥ + ٢) + (–٣ + ١) ت

= ٧ – ٢ت أمبير

حاول أن تحل

(٦) إذا كانت شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة تساوى ٦ + ٤ ت أمبير، وكانت شدة التيار المار فى إحداهما $\frac{١٧}{٤ - ت}$، فأوجد شدة التيار المار فى المقاومة الأخرى.

تحقق من فهمك

(١) **تفكير ناقد:** أوجد فى أبسط صورة $(١ - ت)^{-١٠}$

٣ - ١

تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

Determining the Types of Roots of a Quadratic Equation

سوف تتعلم

- كيفية تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

فكر وناقش

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) فى متغير واحد فى ح؛ وعلمت من خلال حل المعادلة أن عدد حلولها الحقيقية إما أن يكون حلين أو حلًّا وحيدًا مكررًا، أو لا يوجد حل للمعادلة فى ح، فهل يمكنك إيجاد عدد جذور (حلول) معادلة الدرجة الثانية فى ح دون حلها؟

تعلم

المميز Discriminant

جذرا المعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ≠ ٠ ، أ، ب، جـ ∈ ع

هما: $\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ ، $\frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

وكلا الجذرين يحتوى على المقدار $\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}$.

يسمى المقدار ب^{٢} - ٤أجـ مميز المعادلة التربيعية، ويستخدم لتحديد نوع جذرى المعادلة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جذر Root
- مميز Discriminant

مثال

(١) حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية:

(أ) ٥س^{٢} + س - ٧ = ٠

(ب) س^{٢} - ٢س + ١ = ٠

(جـ) - س^{٢} + ٥س - ٣٠ = ٠

الحل

لتحديد نوع الجذرين:

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

(أ) أ = ٥ ، ب = ١ ، جـ = -٧

المميز = ب^{٢} - ٤أجـ

= ١ - ٤ × ٥ (-٧) = ١٤١

∴ المميز موجب لذلك يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

(ب) أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ١

المميز = ب^{٢} - ٤أ جـ

= ٤ - ٤ × ١ × ١ = ٠

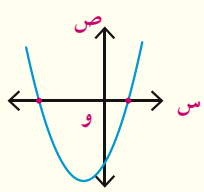
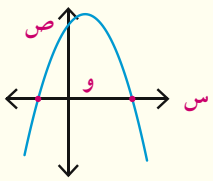
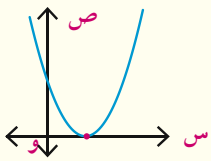
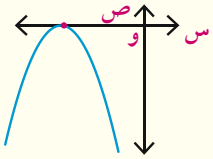
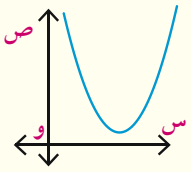
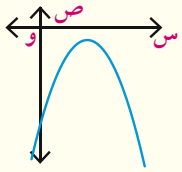
∴ المميز يساوى صفرًا، إذن الجذران حقيقيان ومتساويان.

ج) أ = −١ ، ب = ٥ ، جـ = − ٣٠ المميز = ب^{٢} − أجـ

= ٢٥ − ٤ × −١ × −٣٠ = −٩٥

∵ المميز سالب، إذن يوجد جذران مركبان.

لاحظ أن

المميز	عدد الجذور وأنواعها	شكل تخطيطي للدالة المرتبطة بالمنحنى
(ب^{٢} − ٤أجـ) > ٠	جذران حقيقيان مختلفان	 
ب^{٢} − ٤أجـ = ٠	جذر حقيقي واحد مكرر	 
ب^{٢} − ٤أجـ < ٠	جذران مركبان	 

حاول أن تحل

(١) حدِّد عدد الجذور وأنواعها لكل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية :

أ) ٦س^{٢} = ١٩ س − ١٥ ب) ١٢س − ٤س^{٢} = ٩

جـ) س (س − ٢) = ٥ د) س(س + ٥) = ٢(س − ٧)

مثال

(٢) أثبت أن جذرى المعادلة ٢س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠ مركبان، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحل

أ = ٢، ب = − ٣، جـ = ٢

∵ المميز = ب^{٢} − ٤أجـ ∴ المميز = (− ٣)^{٢} − ٤ × ٢ × ٢ = ٩ − ١٦ = − ٧

∵ المميز سالب ∴ يوجد جذران مركبان

القانون العام: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

$س = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{-٧}}{٢ \times ٢} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}\ ت}{٤}$

جذرا المعادلة هما: $\frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت، $\frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ت

تفكير ناقد: هل بالضرورة أن يكون جذرا المعادلة التربيعية فى مجموعة الأعداد المركبة عددين مترافقين؟ وضح بمثال من عندك.

حاول أن تحل

(٢) أثبت أن جذرى المعادلة ٧س^{٢} – ١١ س + ٥ = ٠ مركبان، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

مثال

(٣) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} + ٢(ك – ١) س + ٩ = ٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم تحقق من صحة الناتج:

الحل

ب^{٢} – ٤أجـ = ٠

٤(ك – ١)^{٢} – ٤ × ١ × ٩ = ٠

٤ك^{٢} – ٨ك – ٣٢ = ٠

ك^{٢} – ٢ك – ٨ = ٠

(ك – ٤)(ك + ٢) = ٠

ك = ٤ أو ك = –٢

التحقيق: عندما ك = ٤

تصبح المعادلة: س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠

ويكون لها جذران متساويان هما: –٣، –٣

التحقيق: عندما ك = –٢

تصبح المعادلة: س^{٢} – ٦س + ٩ = ٠

ويكون لها جذران متساويان هما: ٣،٣

حاول أن تحل

(٣) إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} – ٢ك س + ٧ك – ٦س + ٩ = ٠ متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذرين.

تحقق من فهمك

(١) **الربط بالصحة:** تقوم منظمة الصحة العالمية بجهود كبيرة للتوعية بأخطار أمراض الكبد الوبائي، وفي دراسة قامت بها فى أحد البلدان من بين ١٠٠٠٠ شخص فى أحد الأعوام كانت نتائجها كما هو مبين فى الجدول المقابل. وتمثل المعادلة: ص = –٢,٥ ن^{٢} – ٧,٥ ن + ٩٤٥ عدد المصابين، حيث ن تمثل عدد السنوات بعد عام ٢٠٠٥.

العام	عدد الإصابات لكل ١٠٠٠٠ شخص
٢٠٠٥	٩٤٥
٢٠٠٧	٩٢٠
٢٠١٠	٨٤٥
٢٠١٤	
٢٠٢٠	

أ) احسب عدد المصابين فى عامى ٢٠١٤، ٢٠٢٠

ب) أوجد باستخدام القانون العام قيمة ن عندما ص = ٤٩٥

جـ) متى يصبح عدد المصابين مساويًا صفرًا؟ وهل هذا التوقع معقول؟ فسر إجابتك؟

د) ابحث باستخدام الشبكة الدولية (الأنترنت) أسباب هذا المرض وكيفية الوقاية منه وطرق علاجه.

العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

The Relation Between Two Roots of the Second Degree Equation and the Coefficients of its Terms

٤ - ١

سوف تتعلم

- كيفية إيجاد مجموع الجذرين لمعادلة تربيعية معطاة.
- كيفية إيجاد حاصل ضرب الجذرين
- إيجاد معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مجموع جذرين Sum of Two Roots
- حاصل ضرب جذرين Product of Two Roots

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

نعلم أن جذرى المعادلة ٤س^{٢} – ٨س + ٣ = ٠ هما $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$

مجموع الجذرين $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} = \frac{٣+١}{٢} = ٢$

حاصل ضرب الجذرين $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٤}$

هل توجد علاقة بين مجموع جَذرى المعادلة ومعاملات حدودها؟

هل توجد علاقة بين حاصل ضرب جَذرى المعادلة ومعاملات حدودها؟

تعلم

مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

Sum and product of two roots

جذرا المعادلة التربيعية أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما:

$$\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} \quad ، \quad \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

وباعتبار أن الجذر الأول = ل، الجذر الثانى = م فإن:

ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ (أثبت ذلك) ل م = $\frac{جـ}{أ}$ (أثبت ذلك)

تعبير شفهى فى المعادلة التربيعية أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

أوجد ل + م ، ل م فى الحالات الآتية:

أ إذا كان أ = ١ ب إذا كانت ب = أ ج إذا كان أ = جـ

مثال

(١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة:

٢س^{٢} + ٥ س – ١٢ = ٠

الحل

أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = – ١٢

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{٢} = -\frac{٥}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-١٢}{٢} = -٦$

حاول أن تحل

(١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية :

أ) $٢ س^{٢} + س - ٦ = ٠$ ب) $٣ س^{٢} = ٢٣ س - ٣٠$ جـ) $(٢س - ٣)(س + ٢) = ٠$

مثال

(٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة $٢ س^{٢} - ٣ س + ك = ٠$ يساوى ١ فأوجد قيمة ك، ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة.

الحل

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ}$ $\therefore \frac{ك}{٢} = ١$ $\therefore$ ك $= ٢$

أ $= ٢$، ب $= -٣$، جـ $= ٢$

القانون العام: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$

$= \frac{٣ \pm \sqrt{١٦ - ٩}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{-٧}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧} ت}{٤}$

مجموعة حل المعادلة هى $\{\frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{٧}}{٤} ت ، \frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{٧}}{٤} ت\}$

حاول أن تحل

(٢) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة $٣س^{٢} + ١٠س - جـ = ٠$ هو $\frac{-٨}{٣}$ فأوجد قيمة جـ، ثم حل المعادلة.

(٣) إذا كان مجموع جذرى المعادلة $٢ س^{٢} + ب س - ٥ = ٠$ هو $\frac{-٣}{٢}$ فأوجد قيمة ب، ثم حل المعادلة.

مثال

(٣) إذا كان $(١ + ت)$ هو أحد جذور المعادلة $س^{٢} - ٢ س + أ =$ حيث أ $\ni ع$ * فأوجد:

أ) الجذر الآخر ب) قيمة أ

الحل

أ $= ١$ ، ب $= -٢$ ، جـ $= أ$

أ) $\because$ $١ + ت$ هو أحد جذرى المعادلة

$\therefore$ الجذر الآخر $= ١ - ت$ لأن الجذرين مترافقان ومجموعهما $= ٢$

ب) $\because$ حاصل ضرب الجذرين $= أ$

$\therefore (١ + ت)(١ - ت) = أ$

$\therefore ١ + ١ = أ$ $\therefore$ أ $= ٢$

حاول أن تحل

(٤) إذا كان $(٢ + ت)$ هو أحد جذور المعادلة $س^{٢} - ٤ س + ب = ٠$ فأوجد

أ) الجذر الآخر. ب) قيمة ب

تعلم

تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها

Forming the quadratic equation whose roots are known

بفرض أن ل، م هما جذرا المعادلة التربيعية: $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$، $أ \neq ٠$

بقسمة طرفى المعادلة على أ: $\therefore س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠$

أى $س^{٢} - (\frac{-ب}{أ}) س + \frac{جـ}{أ} = ٠$

$\because$ ل، م جذرا المعادلة التربيعية ، $ل + م = -\frac{ب}{أ}$ ، $ل م = \frac{جـ}{أ}$

$\therefore$ المعادلة التربيعية التى جذراها ل،م هى: $س^{٢} - (ل + م) س + ل م = ٠$

مثال

(٤) كون المعادلة التربيعية التى جذراها ٤، -٣

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

$\because ل + م = ٤ + (-٣) = ١$، $ل م = ٤ (-٣) = -١٢$، $\therefore$ صيغة المعادلة التربيعية هى: $س^{٢} - (ل + م) س + ل م = ٠$

$\therefore$ المعادلة هى: $س^{٢} - س - ١٢ = ٠$

مثال

(٥) كوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها: $\frac{-٢+٢ت}{١+ت}$ ، $\frac{-٢-٤ت}{٢-ت}$

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

$ل = \frac{-٢+٢ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{٤ت}{٢} = ٢ت$

$م = \frac{-٢-٤ت}{٢-ت} \times \frac{٢+ت}{٢+ت} = \frac{-١٠ت}{٥} = -٢ت$

$ل + م = ٢ت - ٢ت = ٠$

، $ل م = ٢ت \times -٢ت = -٤ت^{٢} = ٤$

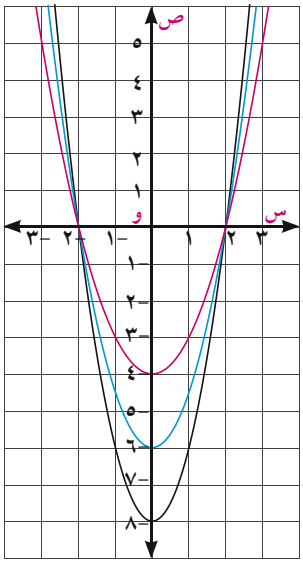
$\because$ المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م : $س^{٢} + (ل + م) س + ل م = ٠$

$\therefore س^{٢} + ٤ = ٠$

حاول أن تحل

(٥) كوِّن المعادلة التربيعية فى كل مما يأتى بمعلومية جذريها:

أ ٣ ، -٥ ب $-٩ت$ ، $٩ت$ جـ $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣+٣ت}{١-ت}$



تفكير ناقد: الشكل المجاور يمثل مجموعة من منحنيات بعض الدوال التربيعية التى يمر كل منها بالنقطتين (٠، -٢) ، (٠، ٢).
أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال

تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

Forming a quadratic equation from the roots of another equation

مثال

٦ إذا كان ل، م جذرى المعادلة ٢ س^{٢} – ٣ س – ١ = ٠ فكون المعادلة التربيعية التى جذراها ل^{٢}، م^{٢}.

الحل

المعادلة المعلومة بالتعويض عن أ = ٢، ب = – ٣، جـ = –١: ل + م = $-\frac{-٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$، ل م = $-\frac{١}{٢}$

المعادلة المطلوبة بالتعويض عن ل + م = $\frac{٣}{٢}$، ل م = $-\frac{١}{٢}$ فى الصيغة ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ ل م

∴ ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ ل م = $(\frac{٣}{٢})^{٢} - ٢ \times (-\frac{١}{٢})$

= $\frac{٩}{٤} + ١ = \frac{٩}{٤} + \frac{٤}{٤} = \frac{١٣}{٤}$

∴ ل^{٢}م^{٢} = (ل م)^{٢}

∴ ل^{٢}م^{٢} = $(-\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}$

لاحظ أن

ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} – ٢ل م

بالتعويض فى صيغة المعادلة التربيعية: س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = ٠

س^{٢} – $\frac{١٣}{٤}$ س + $\frac{١}{٤}$ = ٠ بضرب طرفى المعادلة فى ٤

∴ المعادلة التربيعية المطلوبة هى: ٤ س^{٢} – ١٣ س + ٤ = ٠

حاول أن تحل

٦ فى المعادلة السابقة ٢ س^{٢} – ٣ س – ١ = ٠ كوِّن المعادلات التربيعية التى جذرا كل منها كالآتى:

أ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ ب $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$ جـ ل + م ، ل م

تحقق من فهمك

١ فى كل مما يأتي كون المعادلة التربيعية التى جذراها:

أ $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ب ٥ $\sqrt{٣}$ ، –٢ $\sqrt{٣}$ جـ ٣ + $\sqrt{٢}$ ت ، ٣ – $\sqrt{٢}$ ت

٢ إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة س^{٢} + ٣س – ٥ = ٠ فكوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها ل^{٢}، م^{٢}.

١ - ٥ إشارة الدالة

Sign of a Function

سوف تتعلم

- بحث إشارة كل من: الدالة الثابتة – دالة الدرجة الأولى – دالة الدرجة الثانية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- إشارة دالة Sign of a function
- دالة ثابتة Constant Function
- دالة خطية (دالة الدرجة الأولى) Linear Function
- دالة تربيعية (دالة الدرجة الثانية) Quadratic Function

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

سبق أن درست التمثيل البيانى لدالة الدرجة الأولى ودالة الدرجة الثانية، وتعرفت على الشكل العام لمنحنى كل دالة. فهل يمكنك بحث إشارة كل من هذه الدوال؟

المقصود ببحث إشارة الدالة هو تحديد قيم المتغير س (مجال س) التى تكون عندها قيم الدالة د على النحو الآتى:

موجبة، أى د(س) > ٠

سالبة، أى د(س) < ٠

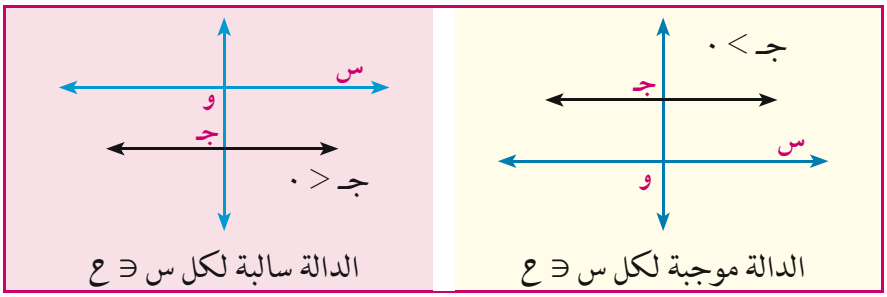
مساوية للصفر د(س) = ٠

تعلم

أولا: إشارة الدالة الثابتة First: The sign of the Constant Function

إشارة الدالة الثابتة د حيث د(س) = جـ (جـ ≠ ٠) هى نفس إشارة جـ لكل س ∈ ع.

والشكل التالى يوضح إشارة الدالة د.



مثال

(١) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

(أ) د(س) = ٥ (ب) د(س) = −٧

الحل

(أ) ∵ د(س) > ٠ ∴ إشارة الدالة موجبة لكل س ∈ ع

(ب) ∵ د(س) < ٠ ∴ إشارة الدالة سالبة لكل س ∈ ع

حاول أن تحل

(١) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = $-\frac{٢}{٣}$

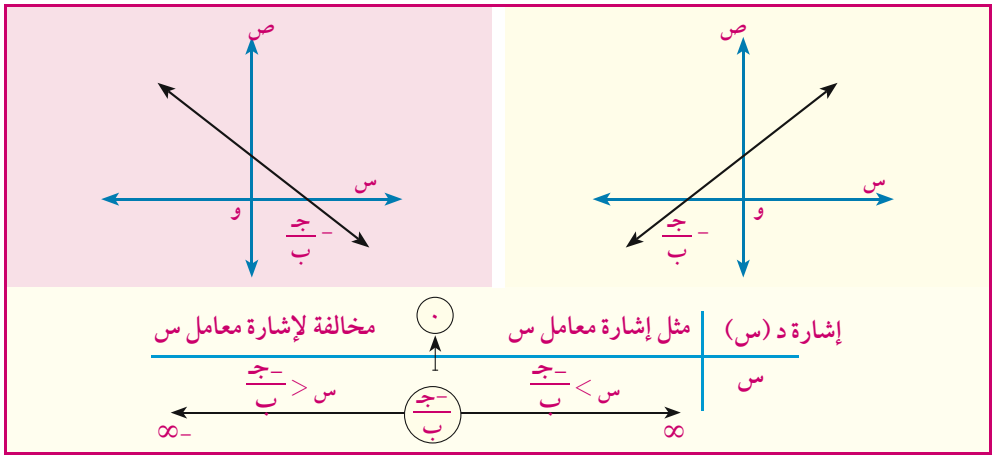
ب) د(س) = $\frac{٥}{٢}$

ثانيًا: إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

Second: Sign of the Linear Function

قاعدة الدالة د هى د(س) = ب س + جـ ، ب ≠ ٠ ، س = $-\frac{جـ}{ب}$ عندما د(س) = ٠

والشكل البيانى التالى يوضح إشارة الدالة د.



مثال

(٢) عين إشارة الدالة د حيث د(س) = س − ٢ مع توضيح ذلك بيانيًّا:

الحل

قاعدة الدالة: د(س) = س − ٢

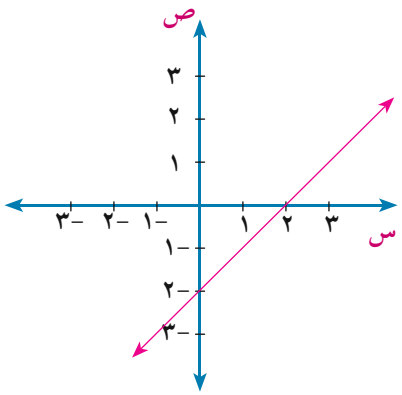
رسم الدالة:

عندما د(س) = ٠ فإن س = ٢

عندما س = ٠ فإن د(س) = − ٢

من الرسم نجد أن:

- الدالة موجبة عندما س > ٢
- الدالة د(س) = ٠ عندما س = ٢
- الدالة سالبة عندما س < ٢



حاول أن تحل

(٢) عين إشارة الدالة د(س) = − ٢س − ٤ مع توضيح ذلك بيانيًّا.

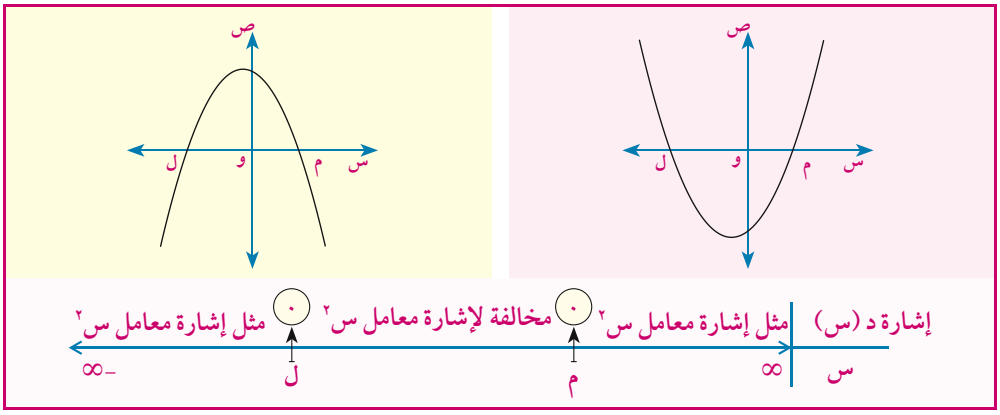
ثالثا: إشارة الدالة التربيعية

Third: Sign of the Quadratic Function.

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د، حيث د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

نوجد مميز المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ فإذا كان:

أولًا: ب^{٢} – ٤أ جـ > ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيان ل، م، وبفرض أن ل < م تكون إشارة الدالة كما فى الأشكال الآتية:



مثال

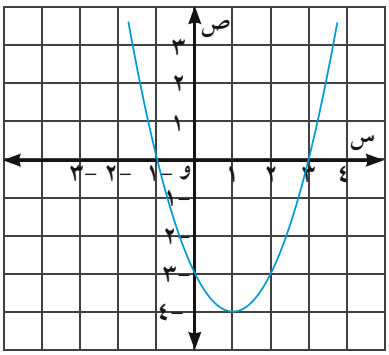
(٣) مثل بيانيًا د، حيث د(س) = س^{٢} – ٢ س – ٣ ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

بتحليل المعادلة: س^{٢} – ٢ س – ٣ = ٠

(س – ٣) (س + ١) = ٠

فيكون جذرا المعادلة: –١، ٣



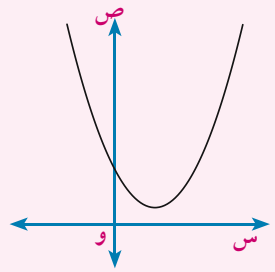
من الرسم نجد أن:

- د(س) > ٠ عندما س ∈ ح –]– ١، ٣[
- د(س) < ٠ عندما س ∈]– ١، ٣[
- د(س) = ٠ عندما س ∈ {– ١، ٣}

حاول أن تحل

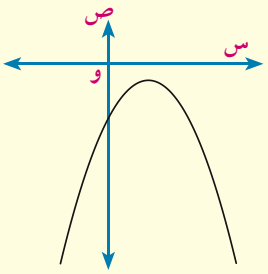
(٣) مثل بيانيًا د، حيث د(س) = س^{٢} – س + ٦ ثم عين إشارة الدالة د.

ثانيًا: إذا كان: ب^{٢} – ٤أ جـ < ٠ فإنه لاتوجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل س^{٢}، والأشكال التالية توضح ذلك.



إذا كانت: أ > ٠

د(س) > ٠ لكل س ∈ ع



إذا كانت: أ < ٠

د(س) < ٠ لكل س ∈ ع

مثال

٤ مثل بيانيًّا د حيث د(س) = س^{٢} – ٤س + ٥ ثم عين إشارة الدالة د.

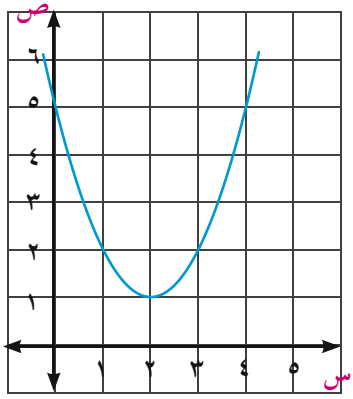
الحل

المميز (ب^{٢} – ٤ أ جـ) = (–٤)^{٢} – ٤ × ١ × ٥

= ١٦ – ٢٠ = – ٤ < ٠

لذلك فإن المعادلة س^{٢} – ٤س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية

إشارة الدالة موجبة لكل س ∈ ع (لأن معامل س^{٢} > ٠)



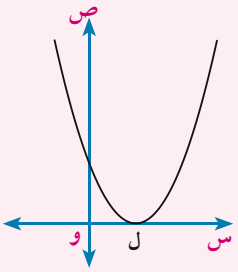
حاول أن تحل

٤ مثل بيانيًّا د، حيث د(س) = – س^{٢} – ٢س – ٤ ثم عين إشارة الدالة د.

ثالثًا: إذا كان: ب^{٢} – ٤أ جـ = ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوى ل، وتكون إشارة الدالة د كالآتى:

- مثل إشارة أ عندما س ≠ ل
- د(س) = ٠ عندما س = ل

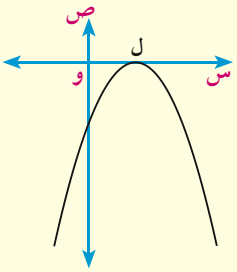
والأشكال الآتية توضح ذلك.



إذا كانت: أ < ٠

د(س) > ٠ لكل س ≠ ل،

د(س) = ٠ عندما س = ل

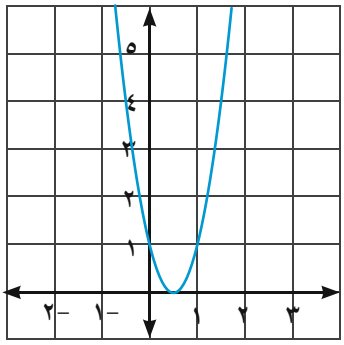


إذا كانت: أ > ٠

د(س) < ٠ لكل س ≠ ل،

د(س) = ٠ عندما س = ل

مثال



(٥) مثل بيانيًّا د حيث د(س) =٤ س^{٢} – ٤س + ١ ، ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

المميز (ب^{٢} – ٤أ جـ) = (–٤)^{٢} – ٤ × ٤ × ١

= ١٦ – ١٦ = ٠

لذلك فإن المعادلة ٤ س^{٢} – ٤س + ١ = ٠ لها جذران متساويان.

بالتحليل: (٢س – ١)^{٢} = ٠

بوضع: ٢س – ١ = ٠ تكون س = $\frac{١}{٢}$

د(س) > ٠ عندما س ≠ $\frac{١}{٢}$ ، د(س) = ٠ عندما س = $\frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

(٥) مثل بيانيًّا د، حيث د(س) = – ٤ س^{٢} – ١٢س – ٩ ثم عين إشارة الدالة د.

مثال

(٦) اثبت أنه لجميع قيم س ∈ ع يكون جذرا المعادلة ٢س^{٢} – ك س + ك –٣ = صفر حقيقيين مختلفين

الحل

المميز (ب^{٢} – ٤أجـ) = (–ك)^{٢} – ٤ × ٢ × (ك – ٣) = ك^{٢} – ٨ك +٢٤

يكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبًا

نبحث إشارة الدالة ص = ك^{٢} – ٨ك +٢٤

فيكون مميز المعادلة ك^{٢} – ٨ك + ٢٤ = ٠ هو:

(–٨)^{٢} – ٤ × ١ × ٢٤ = ٦٤ – ٩٦ = –٣٢ < ٠

لذلك فإن المعادلة	ك^{٢} – ٨ك +٢٤ = ٠	ليس لها جذور حقيقية
∴ إشارة الدالة	ص = ك^{٢} – ٨ك +٢٤	موجبة لكل س ∈ ع (لماذا)؟
فيكون مميز المعادلة	٢س^{٢} – ك س + ك –٣ = صفر	موجب لكل س ∈ ع
∴ جذرا المعادلة	٢س^{٢} – ك س + ك – ٣ = ٠	حقيقيان مختلفان لكل س ∈ ع

تحقق من فهمك

(١) عين إشارة كل دالة من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٢س – ٣ ب د(س) = ٤ – س جـ د(س) = س^{٢} – ٤

د د(س) = ١ – س^{٢} هـ د(س) = ٤ + ٤س + س^{٢} و د(س) = ٣س – ٢س^{٢} + ٤

متباينات الدرجة الثانية

Quadratic Inequalities

٦ - ١

المتباينات التربيعية فى متغير واحد:

Quadratic Inequalities in one variable

سوف تتعلم

- حل المتباينة التربيعية فى متغير واحد.

فكر و ناقش

سبق أن درست متباينة الدرجة الأولى فى متغير واحد، وعلمت أن حل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المتغير التى تحقق هذه المتباينة، وتكتب على صورة فترة، فهل يمكنك حل متباينة الدرجة الثانية فى متغير واحد؟

لاحظ أن:

$س^{٢} - س - ٢ > ٠$ هى متباينة من الدرجة الثانية كما هو موضح بالشكل المجاور

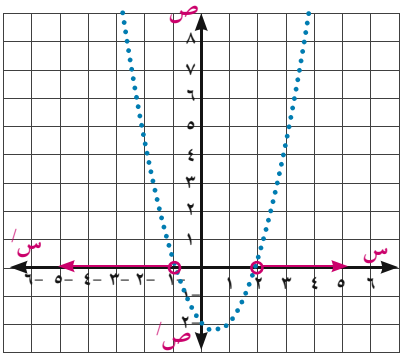
بينما $د(س) = س^{٢} - س - ٢$

هى الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- متباينة Inequality

من الشكل المقابل نجد أن :



- مجموعة حل المتباينة

$س^{٢} - س - ٢ > ٠$ فى ع

هى $]-\infty ، -١[\cup]٢ ، \infty[$

- مجموعة حل المتباينة

$س^{٢} - س - ٢ > ٠$ فى ع

هما $]-١ ، ٢[$

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

تعلم

حل المتباينة التربيعية فى متغير واحد

مثال

(١) حل المتباينة: $س^{٢} - ٥س - ٦ > ٠$

الحل

لحل هذه المتباينة نتبع الخطوات التالية:

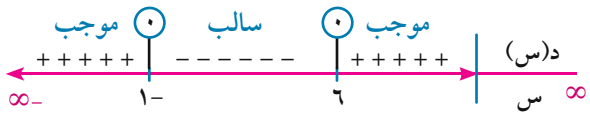
خطوة (١): نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة وذلك كالآتي:

د(س) = س^{٢} − ٥س − ٦

خطوة (٢): ندرس إشارة الدالة د حيث د(س) = س^{٢} − ٥س − ٦ ، ونوضحها على خط الأعداد بوضع د(س) = ٠

س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠ ∴ (س − ٦)(س + ١) = ٠

أ، س = ٦ س = −١



خطوة (٣): تحدد الفترات التى تحقق المتباينة س^{٢} − ٥س − ٦ < ٠



فيكون مجموعة حل المتباينة هى:]−∞، −١[∪]٦، ∞[

حاول أن تحل

(١) حل كلًا من المتباينات الآتية:

أ س^{٢} + ٢س − ٨ < ٠ ب س^{٢} + س + ١٢ < ٠

مثال

(٢) حل المتباينة: (س + ٣)^{٢} ⩾ ١٠ − ٣(س + ٣).

الحل

★ ∵ (س + ٣)^{٢} ⩾ ١٠ − ٣(س + ٣)

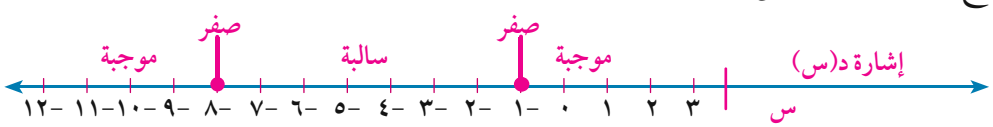
∴ س^{٢} + ٦س + ٩ ⩾ ١٠ − ٣س − ٩

∴ س^{٢} + ٩س + ٨ ⩾ ٠

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى: س^{٢} + ٩س + ٨ = ٠

بالتحليل إلى عوامل: (س + ٨)(س + ١) = ٠ مجموعة حل المعادلة: {−٨، −١}

★ و يوضح خط الأعداد التالى إشارة الدالة د(س) = س^{٢} + ٩س + ٨



وعلى ذلك فإن: مجموعة حل المتباينة هى : [−٨، −١]

حاول أن تحل

(٢) حل المتباينات الآتية:

أ) $٥س^{٢} + ١٢س \leqslant ٤٤$

ب) $(س + ٣)^{٢} + ٣(س + ٣) - ١٠ \geqslant ٠$

تحقق من فهمك

(١) ما الفرق بين معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد ومتباينة الدرجة الثانية فى متغير واحد؟

(٢) ما علاقة بحث إشارة الدالة التربيعية بحل متباينات الدرجة الثانية فى متغير واحد؟

(٣) **اكتشف الخطأ:** أوجد مجموعة حل المتباينة $(س + ١)^{٢} > ٤(٢س - ١)^{٢}$

حل يوسف

$\because (س + ١)^{٢} > ٤(٢س - ١)^{٢}$

$\therefore س + ١ > ٢(٢س - ١)$ وذلك بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

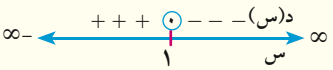
$\therefore -٤س + س + ٢ + ١ > ٠$

$\therefore -٣س + ٣ > ٠$

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى:

$-٣س + ٣ = ٠$

مجموعة الحل هى {١}



★ بحث إشارة الدالة د حيث

$د(س) = -٣س + ٣$

مجموعة حل المتباينة هى $]١ ، \infty[$

حل نور

$\because (س + ١)^{٢} > ٤(٢س - ١)^{٢}$

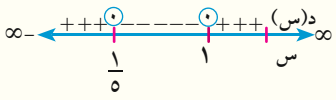
$\therefore س^{٢} + ٢س + ١ > ١٦س^{٢} - ١٦س + ٤$

$\therefore ١٥س^{٢} - ١٨س + ٣ < ٠$

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :

$\therefore ٣(٥س - ١)(س - ١) = ٠$

مجموعة الحل هى $\{١، \frac{١}{٥}\}$



★ بحث إشارة الدالة د حيث

$د(س) = ١٥ س^{٢} - ١٨ س + ٣$

نجد أن:

مجموعة حل المتباينة هى ح = $[\frac{١}{٥}، ١]$

(٤) **تفكير ناقد:** أوجد مجموعة حل المتباينة $(س + ٣)^{٢} > ١٠ - ٣(س + ٣)$

ملخص الوحدة

① **حل المعادلة:** أس^{٢}+ب س +جـ = ٠ حيث أ،ب،جـ ∋ ح، أ ≠ ٠

الطريقة
التحليل إلى العوامل
إكمال المربع
استخدام القانون العام
التمثيل البيانى

② **بحث نوع جذرى المعادلة التربيعية**

يسمى المقدار (ب^{٢} – ٤أجـ) بمميز المعادلة التربيعية الذى يبين نوع جذور المعادلة وعدد حلولها كالآتى :

- ★ (ب^{٢} – ٤أجـ) > ٠ يوجد جذران حقيقيان مختلفان.
- ★ ب^{٢} – ٤أجـ = ٠ يوجد جذر حقيقى واحد .
- ★ ب^{٢} – ٤أجـ < ٠ يوجد جذران مركبان.

③ **الأعداد المركبة:**

العدد المركب هو الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت، حيث أ، ب عددان حقيقيان، ب ت هوالجزء التخيلى، والجدول التالى يبين قوى ت للأسس الصحيحة الموجبة:

ت$^{٤ن+١}$	ت$^{٤ن+٢}$	ت$^{٤ن+٣}$	ت^{٤ن}
ت	– ١	– ت	١

تساوى عددين مركبين: إذا كان : أ + ب ت = جـ + ء ت فإن أ = جـ، ب = ء

خواص العمليات: يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، وعند جمع أو طرح الأعداد المركبة تجمع الأجزاء الحقيقية معًا وتجمع الأجزاء التخيلية معًا.

العددان المترافقان: يسمى العددان أ + ب ت ، أ – ب ت بالعددين المترافقين حيث ناتج جمعهما عدد حقيقى، وحاصل ضربهما عدد حقيقى أيضًا.

٤ مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة التربيعية:

إذا كان جذرا المعادلة أ $س^{٢}$ + ب س + جـ = ٠ هما ل، م فإن: ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{جـ}{أ}$

٥ تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها:

إذا كانت ل، م جذرى المعادلة التربيعية، فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة الآتية:

★ (س – ل) (س – م) = ٠

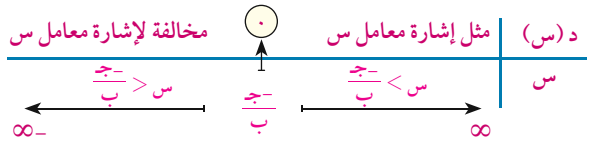
★ إذا كان ل + م = $-\frac{ب}{أ}$ ، ل م = $\frac{جـ}{أ}$ فإن المعادلة هى $س^{٢}$ – (ل + م) س + ل م = ٠

٦ بحث إشارة الدالة:

★ إشارة الدالة الثابتة د، حيث د(س) = جـ (جـ ≠ ٠) هى نفس إشارة جـ لكل س ∈ ع.

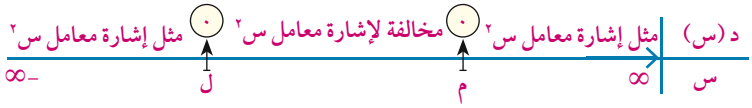
★ قاعدة الدالة الخطية د هى د(س) =ب س+جـ ، ب ≠ ٠

فتكون س = $-\frac{جـ}{ب}$ عندما د(س) = ٠ والشكل التالى يمثل إشارة الدالة د:



★ لتعين إشارة الدالة د، حيث د(س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ، أ ≠ ٠ فإننا نوجد المميز

★ إذا كان: $ب^{٢}$ – ٤أجـ < ٠ فإن إشارة الدالة د تتحدد حسب الشكل التالى:



★ إذا كان: $ب^{٢}$ – ٤أجـ = ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوى ل، وتكون إشارة الدالة د كالآتى: مثل إشارة أ عندما س ≠ ل ، د(س) = ٠ عندما س = ل

★ إذا كان: $ب^{٢}$ – ٤أجـ < ٠ فإنه لاتوجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل $س^{٢}$.

٧ حل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد:

لحل المتباينة التربيعية نتبع الخطوات الآتية :

١- نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ص = د(س) فى الصورة العامة.

٢- ندرس اشارة الدالة د المرتبطة بالمتباينة ونوضحها على خط الأعداد.

٣- تحديد مجموعة حل المتباينة طبقًا للفترات التى تحققها.



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على:

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية على موضوع التشابه.
- يتعرف تشابه مضلعين.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان).
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين).
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج الحقيقة التى تنص على: (المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى ...)
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج التمرين المشهور الذى ينص على : (إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين فى دائرة فى نقطة فإن ...) وعكسه ونتائج عليه.

المصطلحات الأساسية

نسبة	Ratio	أضلاع متناظرة	Corresponding Sides	مماس	Tangent
تناسب	Proportion	زوايا متطابقة	Congruent Angles	قطر	Diameter
قياس زاوية	Measure of an Angle	مضلع منتظم	Regular Polygon	مماس خارجي مشترك	Common External Tangent
طول	Length	شكل رباعي	Quadrilateral	مماس داخلي مشترك	Common Internal Tangent
مساحة	Area	شكل خماسي	Pentagon	دوائر متحدة المركز	Concentric Circles
ضرب تبادلى	Cross Product	بديهية	Postulate/Axiom	نسبة التشابه (معامل التشابه)	Similarity Ratio
طرف	Extreme	محيط	Perimeter		
وسط	Mean	مساحة مضلع	Area of polygon		
مضلعات متشابهة	Similar Polygons	وتر	Chord		
مثلثات متشابهة	Similar Triangles	قاطع	Secant		



دروس الوحدة

الدرس (٢ – ١): تشابه المضلعات.

الدرس (٢ – ٢): تشابه المثلثات.

الدرس (٢ – ٣): العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين.

الدرس (٢ – ٤): تطبيقات التشابه فى الدائرة.

الأدوات المستخدمة

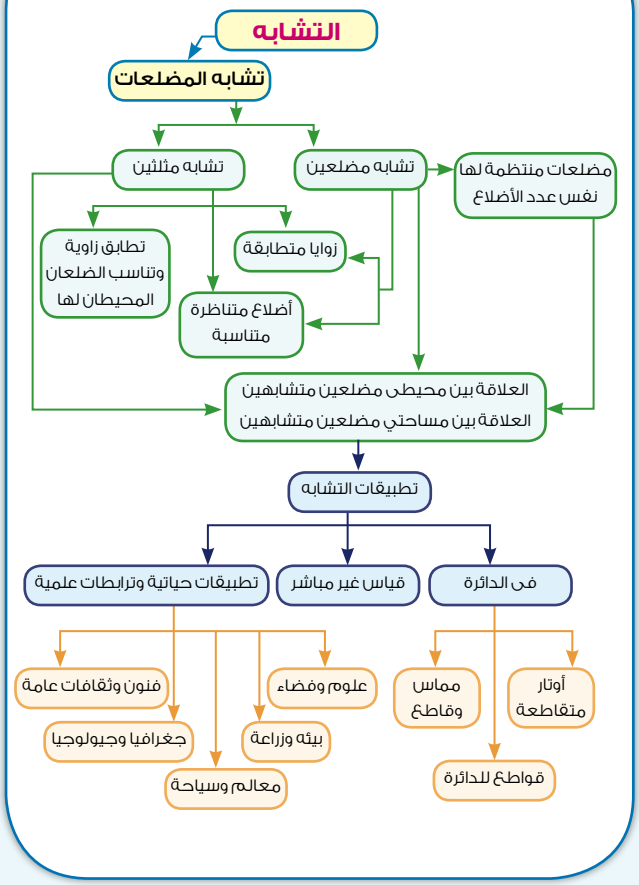
حاسب آلي – جهاز عرض بيانات – برامج رسومية – ورق مربعات – مرآة مستوية – أدوات قياس – آلة حاسبة.

نبذه تاريخية

عند البناء على قطعة من الأرض نحتاج إلى عمل رسم تخطيطي للمبني، ومن البديهي أنه لا يمكن عمل هذا الرسم الهندسى على قطعة من الورق تطابق قطعة الأرض، وإنما نلجأ إلى عمل صورة مصغرة تشابه الصورة الطبيعية للمبنى، وذلك باتخاذ مقياس رسم مناسب للحصول على هذا التصغير، وقياسات زوايا على الرسم، بحيث تساوى قياسات نظائرها فى الواقع.

إذا تأملت الشكل الموضح فى بداية الصفحة تلاحظ أن الطبيعة مليئة بأشكال تحتوى على أنماط تكرر نفسها بمقاييس مختلفة، ومن أمثلة ذلك أوراق الشجر، ورأس زهرة القرنبيط، وتَعرُّجات ساحل البحر. ملاحظة هذه الأنماط المتكررة أدى إلى ظهور هندسة جديدة منذ قرابة 40 عامًا، والتي تهتم بدراسة الأشكال ذاتية التماثل والتي تتكرر بغير انتظام، وقد أطلق عليها اسم هندسة الفتافيت أو هندسة الكسوريات fractals والتي سوف تدرسها في مراحل تعليمية تالية.

مخطط تنظيمي للوحدة



١ - ٢ تشابه المضلعات

Similarity of Polygons

سوف تتعلم

- مفهوم التشابه.
- تشابه المضلعات.
- مقياس الرسم.
- المستطيل الذهبي والنسبة الذهبية.

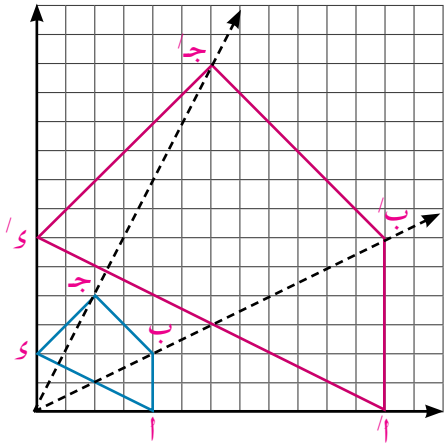
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- مضلعات متشابهة Similar Polygons
- مثلثات متشابهة Similar Triangles
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides
- زاويا متطابقة Congruent Angles
- مضلع منتظم Regular Polygon
- شكل رباعي Quadrilateral
- شكل خماسي Pentagon
- نسبة التشابه (معامل التشابه) Similarity Ratio

الأدوات والوسائل

- حاسب آلى
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- أدوات قياس
- آلة حاسبة

فكر و ناقش



يوضح الشكل المقابل المضلع أ ب جـ ء وصورته أ/ ب/ جـ/ ء/ بتحويل هندسي.

أ قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة:

∠أ ، ∠أ/ - ∠ب ، ∠ب/

∠جـ ، ∠جـ/ - ∠ء ، ∠ء/

ماذا تستنتج؟

ب أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة $\frac{أ/ب/}{أ ب}$ ، $\frac{ب/جـ/}{ب جـ}$ ، $\frac{جـ/ء/}{جـ ء}$ ، $\frac{ء/أ/}{ء أ}$

ماذا تلاحظ؟

عندما يكون للمضلعات الشكل نفسه، وإن اختلفت فى أطوال أضلاعها، فإنها تسمى مضلعات متشابهة.

المضلعان المتشابهان Similar polygons

تعريف

«يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة».

لاحظ أن:

١- فى الشكل الموضح **بند فكر وناقش** نجد:

أ **الزوايا المتناظرة متطابقة:** ∠أ ≡ ∠أ/ ، ∠ب ≡ ∠ب/

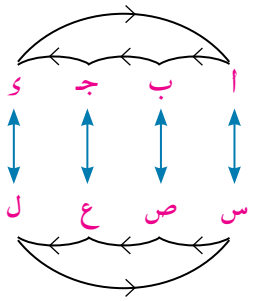
∠جـ ≡ ∠جـ/ ، ∠ء ≡ ∠ء/

ب **الأضلاع المتناظرة متناسبة:** $\frac{أ/ب/}{أ ب} = \frac{ب/جـ/}{ب جـ} = \frac{جـ/ء/}{جـ ء} = \frac{ء/أ/}{ء أ}$

ولذلك يمكننا القول أن الشكل أ/ ب/ جـ/ ء/ يشابه الشكل أ ب جـ ء

٢- نستخدم الرمز (~) للتعبير عن تشابه مضلعين، ويراعى ترتيب كتابة رؤوسهما المتناظرة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.

إذا كان المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل فإن:



أ) ∠ أ ≡ ∠ س ، ∠ ب ≡ ∠ ص ، ∠ جـ ≡ ∠ ع ، ∠ ء ≡ ∠ ل

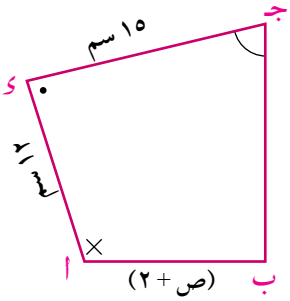
ب) $\frac{أب}{س ص} = \frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{جـ ء}{ع ل} = \frac{ء أ}{ل س}$ = ك (نسبة التشابه)، ك ≠ ٠

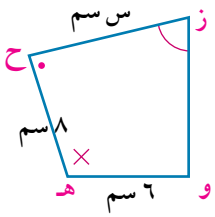
ويكون معامل تشابه المضلع أ ب جـ ء للمضلع س ص ع ل = ك،

و معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب جـ ء = $\frac{١}{ك}$

مثال

(١) **في الشكل المقابل:** المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع هـ و ز ح.





أ) أوجد معامل تشابه المضلع أ ب جـ ء للمضلع هـ و ز ح.

ب) أوجد قيم س، ص.

الحل

∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع هـ و ز ح

فيكون: $\frac{أب}{هـ و} = \frac{ب جـ}{و ز} = \frac{جـ ء}{ز ح} = \frac{ء أ}{ح هـ}$ = معامل التشابه،

$\frac{ص + ٢}{٦} = \frac{ب جـ}{و ز} = \frac{١٥}{س} = \frac{١٢}{٨}$

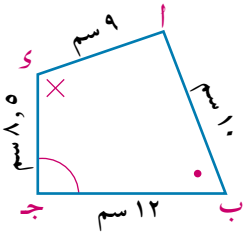
أ) معامل التشابه = $\frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

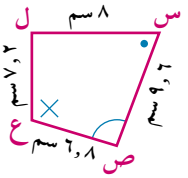
ب) $\frac{١٥}{س} = \frac{٣}{٢}$ ⟵ س = ١٠ سم ، $\frac{ص + ٢}{٦} = \frac{٣}{٢}$ ⟵ ص = ٧ سم

حاول أن تحل

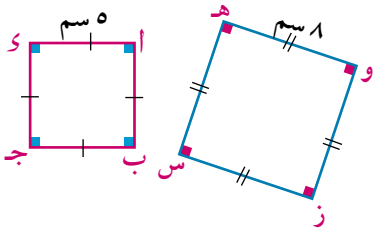
(١) بيِّن أيًّا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة وحدِّد نسبة التشابه.

أ)

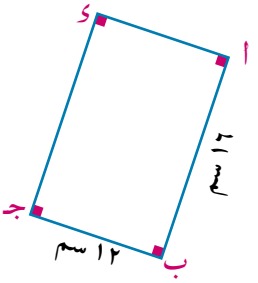


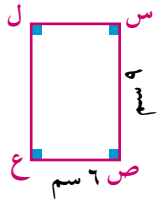


ب)

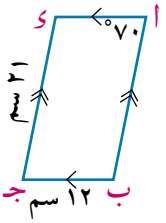


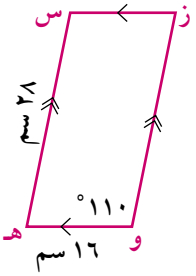
جـ)





د)





فكر

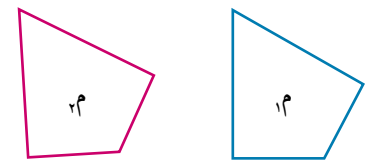
هل جميع المربعات متشابهة؟ هل جميع المعينات متشابهة؟

هل جميع المستطيلات متشابهة؟ هل جميع متوازيات الأضلاع متشابهة؟ فسر إجابتك.

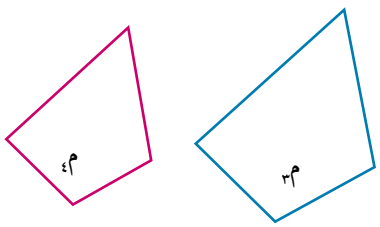
لاحظ أن

١- لكى يتشابه مضلعان يجب أن يتوافر الشرطان معًا، ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر.

٢- المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين، وذلك لتوافر شرطا التشابه (المضلع م$_{١}$ ~ المضلع م$_{٢}$) ويكون معامل التشابه لهما عندئذٍ مساويًا (واحد) ولكن ليس من الضرورى أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين (المضلع م$_{٣}$ ≢ المضلع م$_{٤}$) كما فى الشكل المقابل.



المضلع م$_{١}$ ≡ المضلع م$_{٢}$



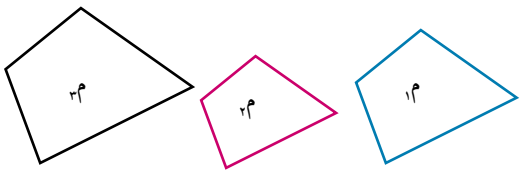
المضلع م$_{٣}$ ~ المضلع م$_{٤}$

٣- المضلعان المشابهان لثالث متشابهان

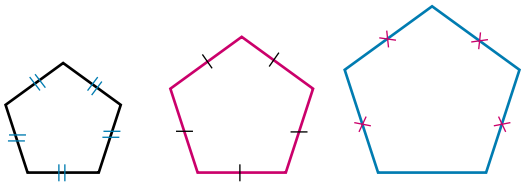
فإذا كان المضلع م$_{١}$ ~ المضلع م$_{٣}$،

المضلع م$_{٢}$ ~ المضلع م$_{٣}$

فإن: المضلع م$_{١}$ ~ المضلع م$_{٢}$



٤- كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة. لماذا؟



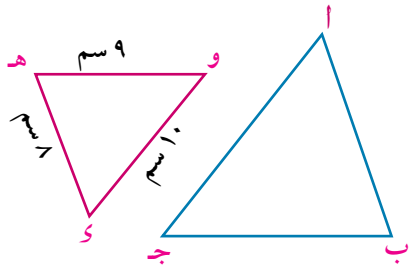
مثال

(٢) **فى الشكل المقابل:** △أ ب جـ ~ △ء هـ و،

ء هـ = ٨سم ، هـ و = ٩سم ، و ء = ١٠سم

إذا كان محيط △أ ب جـ = ٨١سم.

أوجد أطوال أضلاع △أ ب جـ.



الحل

∵ △أ ب جـ ~ △ء هـ و

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ء و}} = \frac{\text{أ ب + ب جـ + جـ أ}}{\text{ء هـ + هـ و + ء و}} = \frac{\text{محيط △ أ ب جـ}}{\text{محيط △ ء هـ و}}$ (خواص التناسب)

ويكون: $\frac{\text{أ ب}}{٨} = \frac{\text{ب جـ}}{٩} = \frac{\text{جـ أ}}{١٠} = \frac{٨١}{٢٧}$

∴ أ ب = $٨ \times \frac{٨١}{٢٧}$ = ٢٤سم ، ب جـ = ٩ × ٣ = ٢٧ ، جـ أ = ١٠ × ٣ = ٣٠سم

لاحظ أن:

إذا كان المضلع م$_{١}$ ~ المضلع م$_{٢}$، **فإن** $\frac{\text{محيط المضلع م}_{١}}{\text{محيط المضلع م}_{٢}}$ = نسبة التشابه (معامل التشابه)

حاول أن تحل

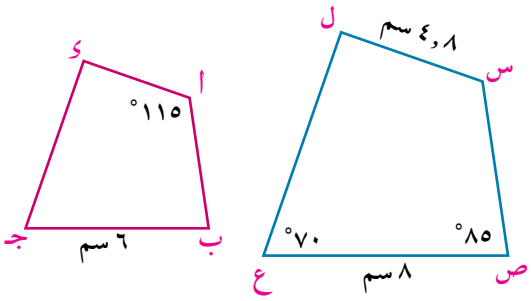
٢ فى الشكل المقابل:

المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

أ احسب ق (∠س ل ع)، طول أء

ب إذا كان محيط المضلع أ ب جـ ء = ١٩,٥سم

أوجد محيط المضلع س ص ع ل.

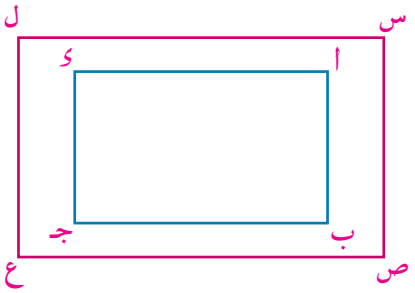


مثال

٣ أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٥سم، ب جـ = ٨سم، أوجد بُعدَى مستطيل آخر مشابه له إذا كان:

أ معامل التشابه = ١,٤ ب معامل التشابه = ٠,٦

الحل



بفرض أن المستطيل س ص ع ل ~ المستطيل أ ب جـ ء

فيكون:

$$\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ع ل}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ل س}}{\text{ء أ}} = \text{معامل التشابه}$$

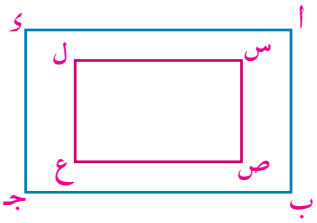
أ عندما يكون معامل التشابه = ١,٤

$$\frac{\text{س ص}}{٥} = \frac{\text{ص ع}}{٨} = ١,٤$$

∴ س ص = ٧سم ، ص ع = ٨,٤سم

لاحظ أن المستطيل س ص ع ل هو تكبير للمستطيل أ ب جـ ء

ب عندما يكون معامل التشابه = ٠,٦



$$\frac{\text{س ص}}{٥} = \frac{\text{ص ع}}{٨} = ٠,٦$$

∴ س ص = ٣سم ، ص ع = ٤,٨سم

لاحظ أن المستطيل س ص ع ل هو تصغير للمستطيل أ ب جـ ء

معامل التشابه لمضلعين: **Similarity ratio of two polygons**

ليكن ك معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٢

إذا كان: ك > ١ **فإن** المضلع م١ هو تكبير للمضلع م٢

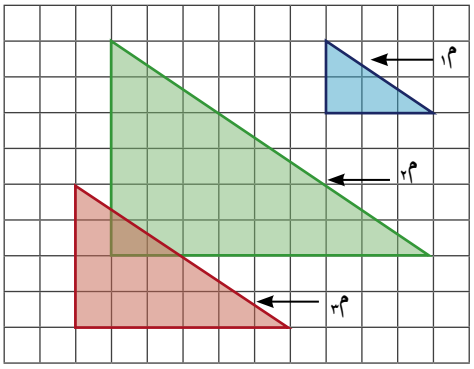
٠ < ك < ١ **فإن** المضلع م١ هو تصغير للمضلع م٢

ك = ١ **فإن** المضلع م١ يطابق المضلع م٢

وبصفة عامة يمكن استخدام معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.

٤ فى الشكل المقابل:

المضلع م١ يشابه المضلع م٢، المضلع م٢ يشابه المضلع م٣.



أ أوجد معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٣، معامل تشابه المضلع م٢ للمضلع م٣.

ب هل المضلع م١ ~ المضلع م٢ ؟ ولماذا؟ و إذا كان المضلع م١ ~ المضلع م٢ فأوجد معامل التشابه عندئذٍ.

الحل

أ معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٣ = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

معامل تشابه المضلع م٢ للمضلع م٣ = $\frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

ب ∵ المضلع م١ ~ المضلع م٣ ، المضلع م٢ ~ المضلع م٣

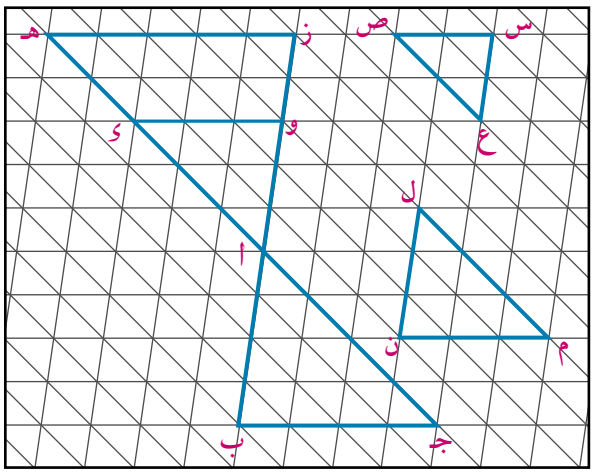
∴ المضلع م١ ~ المضلع م٢

ويكون معامل تشابه المضلع م١ للمضلع م٢ = $\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

٣ صورة مستطيلة الشكل بعداها ١٠سم، ١٥سم، أوجد بُعدىَ ومساحة صورة أخرى مشابهة لها إذا كان معامل التشابه ٢,٤.

٤ من شبكة المثلثات المتطابقة بالشكل أوجد معامل التشابه، واذكر هل يؤدى إلى (تكبير - تصغير - تطابق) لكل من:



أ △ ل م ن ~ △ ا جـ ب

ب △ ل م ن ~ △ ع س ص

جـ △ ا ى و ~ △ ل م ن

د △ هـ ز ا ~ △ جـ ب ا

هـ △ س ص ع ~ △ ب جـ ا

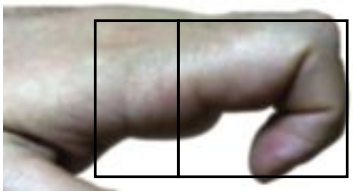
نشاط

النسبة الذهبية The Golden Ratio



انتشرت حديثًا شاشات عرض لأجهزة الحاسب الآلى والتليفزيون بمقاسات نسبة طولها إلى عرضها يقترب من ١٦ : ٩ بدلًا من ٤ : ٣ وقد لاقت قبولًا أكثر لما توفره من راحه للعين أثناء الرؤية فتقترب بذلك من المستطيل الذهبي.

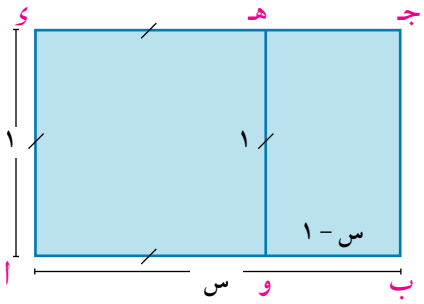
المستطيل الذهبي:



هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى مربع ومستطيل آخر مشابه للمستطيل الأصلي، بشرط أن يكون طوله أصغر من ضعف عرضه، وتسمى النسبة بين طول المستطيل الذهبي إلى عرضه بالنسبة الذهبية.

لإيجاد النسبة الذهبية نعتبر أن طول المستطيل الذهبي أ ب جـ ء هو (س) وعرضه (١) من وحدات الطول وبرسم المربع أ و هـ ء يكون:

المستطيل أ ب جـ ء ~ المستطيل هـ و ب جـ



$\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ب}} \longleftarrow \frac{\text{س}}{١} = \frac{١}{\text{س} - ١}$

$\therefore$ س^{٢} - س - ١ = صفر

وبحل المعادلة التربيعية نجد أن:

$\text{س} = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$ ، $\text{س} = \frac{١ - \sqrt{٥}}{٢} > ٠$ مرفوض

$\simeq ١,٦١٨$

إذًا النسبة الذهبية هي ١,٦١٨ : ١ تقريبًا.

وقد استخدم بعض الفنانين المستطيل الذهبي في أعمالهم الفنية، ومن بينهم الفنان الشهير ليوناردو دا فينشي (١٤٥٢ - ١٥١٩م) صاحب لوحة «الموناليزا» أو «الجيوكاندا» كما وضع فيبوناتشي (١١٧٠ - ١٢٥٠م) متتابعة الأعداد الشهيرة: ١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...

والتي حدها الأول ١، وحدها الثاني ١، وأي حد آخر يساوي مجموع الحدين السابقين له.

أ أكمل المتتابعة إلى عشرة حدود بنفس النمط.

ب قارن بين كل من النسب $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٨}{٥}$ ، $\frac{١٣}{٨}$ ، بالنسبة الذهبية. ماذا تلاحظ؟

حاول أن تحل

٥ أ إذا كان بعدا مستطيل ٧,٤٢سم، ١٢سم فهل هذا المستطيل يقترب من المستطيل الذهبي؟

ب ما طول مستطيل ذهبي عرضه يساوي ٥سم لأقرب سنتيمتر؟

جـ ما عرض مستطيل ذهبي طوله ١٩٤سم لأقرب سنتيمتر؟

د هل جميع المستطيلات الذهبية متشابهة؟ فسر إجابتك.

تحقق من فهمك

٥ تطبيقات حياتية في الشكل المقابل: إذا كان طول الرجل ١,٨متر قدر ارتفاع كل من: الشجرة - المصباح - المبنى - السيارة ثم بين كيف تتحقق من صحة تقديرك.



٢ - ٢

تشابه المثلثات

Similarity of Triangles

سوف تتعلم

- حالات تشابه المثلثات.
- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر فى المثلث القائم الزاوية.

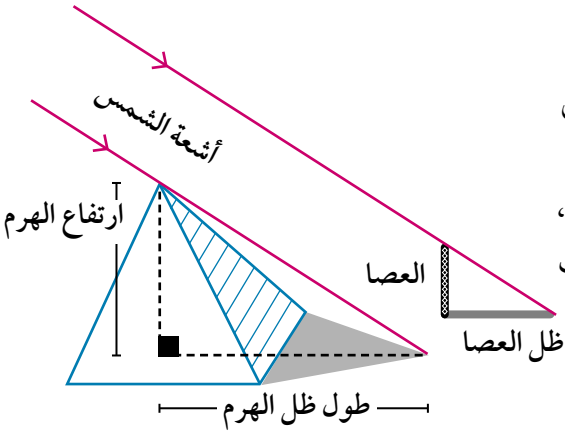
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- بديهية Postulate /Axiom

الأدوات والوسائل

- حاسب آلى
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- مرآة مستوية
- أدوات قياس
- آلة حاسبة

فكر و ناقش

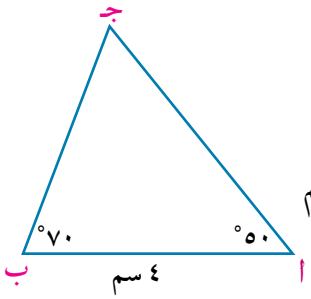


طلب أحد ملوك الفراعنة إلى الرياضى طاليس (٦٠٠ ق.م) أن يوجد ارتفاع الهرم الأكبر، ولم تكن هناك أجهزة أو آلات أو طريقة لإيجاد ارتفاع الهرم مباشرة.

ثبت طاليس عصا رأسيًا وبدأ يقيس ظل العصا ويقارنه بطول العصا نفسها إلى أن جاء وقت وجد فيه أن طول ظل العصا يساوي الطول الحقيقى للعصا نفسها. فقام بقياس طول ظل الهرم، وكان هو ارتفاع الهرم نفسه.

إذا طلب منك قياس ارتفاع سارية العلم باستخدام عصا وشريط مدرج فهل تنتظر حتى يصبح طول ظل العصا مساويًا لطول العصا نفسها أو يمكنك قياس ارتفاع سارية العلم فى أي وقت من يوم مشمس؟ فسِّر إجابتك.

عمل تعاونى



١- ارسم Δ ا ب جـ الذي فيه:
ق(∠ا) = ٥٠°، ق (∠ب) = ٧٠°، ا ب = ٤سم

٢- ارسم Δ ء هـ و الذي فيه:
ق(∠ء) = ٥٠°، ق (∠هـ) = ٧٠°، ء هـ = ٥سم

٣- أوجد بالقياس لأقرب ملليمتر أطوال كل من: $\overline{اجـ}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{ء و}$ ، $\overline{هـ و}$

٤- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب $\frac{اجـ}{ء و} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{ا ب}{ء هـ}$

هل النسب متساوية؟ ماذا تستنتج عن هذين المثلثين؟

قارن نتائجك مع نتائج المجموعات الأخرى واكتب ملاحظاتك.

مسلمة

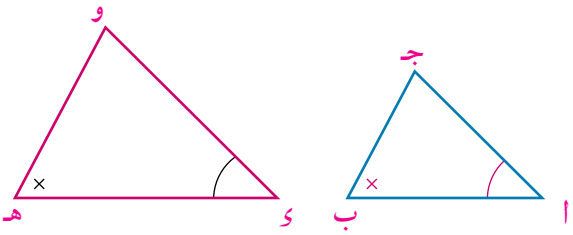
postulate (or axiom)

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.

فى الشكل المقابل:

إذا كان ∠ أ ≡ ∠ ء ، ∠ ب ≡ ∠ هـ

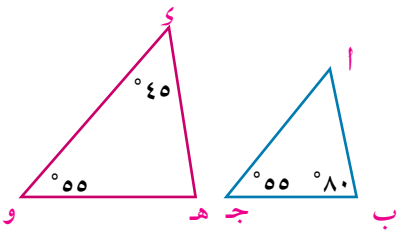
فإن △ أ ب جـ ~ △ ء هـ و



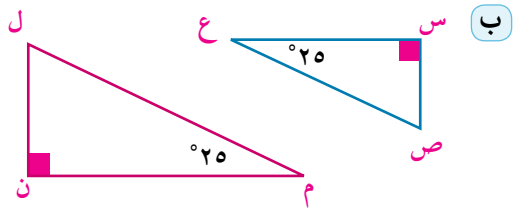
حاول أن تحل

(١) بيِّن أيًّا من أزواج المثلثات التالية تكون متشابهة. اكتب المثلثات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة.

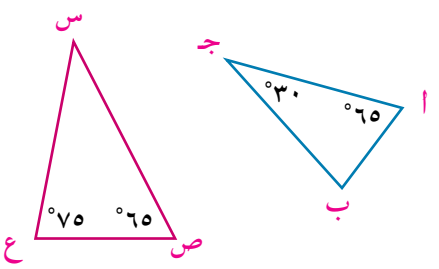
(أ)



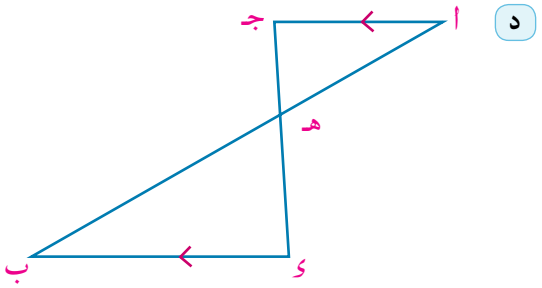
(ب)



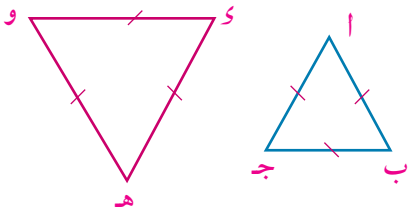
(جـ)



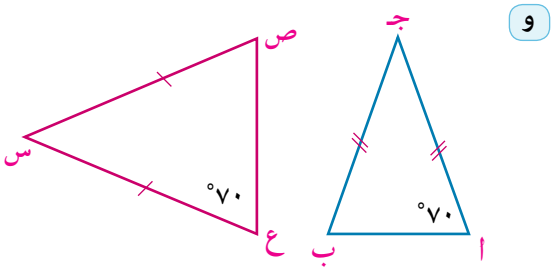
(د)



(هـ)



(و)



لاحظ أن

١- المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان. (كما فى (هـ))

٢- يتشابه المثلثان متساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتى القاعدة فى أحدهما قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث الآخر: (كما فى (و)).

٣- يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين فى المثلث الآخر (كما فى (ب)).

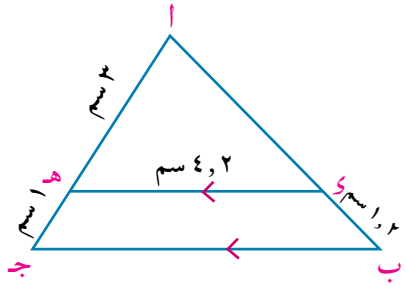
مثال

(١) فى المثلث أ ب جـ، ء ∈ $\overline{أب}$ ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$ حيث $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$،

ب ء = ١,٢سم ، أ هـ = ٣سم ، أ جـ = ٤سم ، ء هـ = ٤,٢سم.

أ أثبت أن △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ

ب أوجد طول كل من: $\overline{أء}$ ، $\overline{بجـ}$



الحل

أ ∵ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ قاطع لهما. (برهانًا)

∴ ∠ أ ء هـ ≡ ∠ أ ب جـ (زاوية مشتركة فى المثلثين)

فى المثلثين أ ء هـ ، أ ب جـ

∵ ∠ أ ء هـ ≡ ∠ أ ب جـ

∠ ء أ هـ ≡ ∠ ب أ جـ (مسلمة التشابه)

∴ △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ

ب ∵ △ أ ء هـ ~ △ أ ب جـ

∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{ءهـ}{بجـ}$ ويكون:

$\frac{أء}{أء + ١,٢} = \frac{٣}{٤} = \frac{٤,٢}{بجـ}$

٤ أ ء = ٣(أ ء + ١,٢) ، ٣ ب جـ = ٤ × ٤,٢

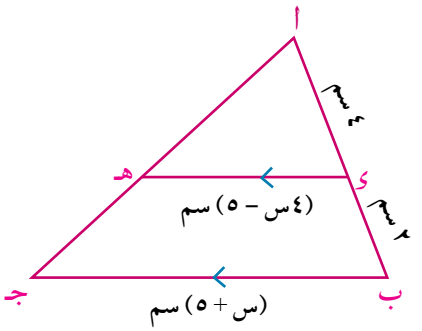
= ٣ أ ء + ٣,٦ ، $= \frac{٤ \times ٤,٢}{٣}$

أ ء = ٣,٦سم ، ب جـ = ٥,٦سم

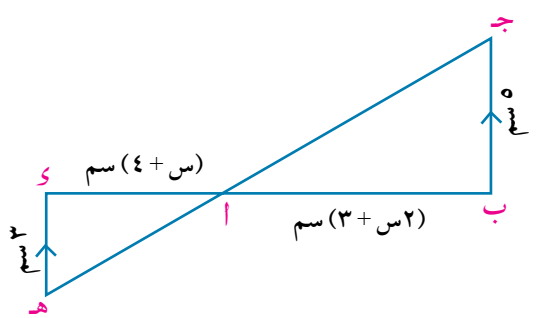
حاول أن تحل

(٢) فى كل من الأشكال التالية، أثبت أن △ أ ب جـ ~ △ أ ء هـ ثم أوجد قيمة س.

أ

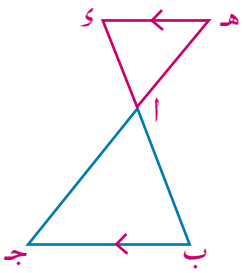
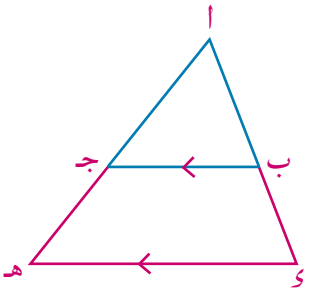
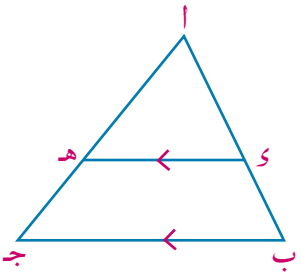


ب



نتائج هامة

نتيجة ١ إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.

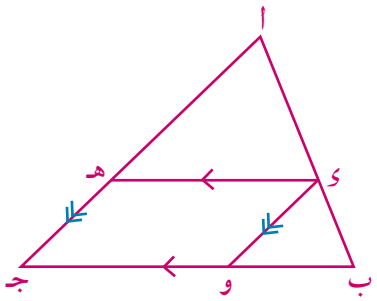
إذا كان $\overleftrightarrow{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overleftrightarrow{اب}$ ، $\overleftrightarrow{اجـ}$ فى ء، هـ على الترتيب كما فى الأشكال الثلاثة السابقة:

فإن: $\triangle$ ا ء هـ ~ $\triangle$ ا ب جـ.

مثال

(٢) **فى الشكل المقابل:** ا ب جـ مثلث، ء $\in \overline{اب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{اجـ}$ فى هـ، $\overleftrightarrow{ء و}$ // $\overline{اجـ}$ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى و.

برهن أن: $\triangle$ ا ء هـ ~ $\triangle$ ء ب و



الحل

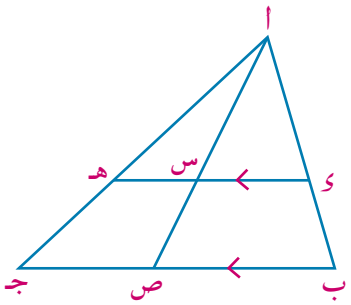
∵ $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ∴ $\triangle$ ا ء هـ ~ $\triangle$ ا ب جـ (١)

∵ $\overline{ء و}$ // $\overline{اجـ}$ ∴ $\triangle$ ء ب و ~ $\triangle$ ا ب جـ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\triangle$ ا ء هـ ~ $\triangle$ ء ب و (وهو المطلوب)

حاول أن تحل

(٣) **فى الشكل المقابل:** ا ب جـ مثلث، ء $\in \overline{اب}$ ، رسم $\overleftrightarrow{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{اجـ}$ فى هـ، رسم $\overleftrightarrow{اس}$ يقطع $\overline{ء هـ}$ ، $\overline{ب جـ}$ فى س، ص على الترتيب.



أ اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.

ب أثبت أن: $\frac{\text{ء س}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{ص جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}}$.

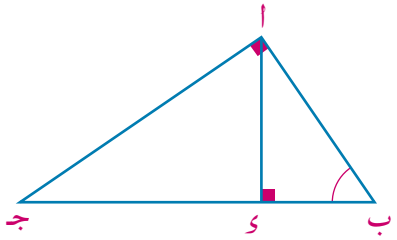
نتيجة ٢

إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.

فى الشكل المقابل: ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ا، $\overline{اء} \perp \overline{ب جـ}$

$\triangle$ ء ب ا، $\triangle$ ا ب جـ فيهما

ق(∠ ا ء ب) = ق (∠ جـ ا ب) = ٩٠° ، ∠ ب مشتركة فى المثلثين.



∴ $\triangle$ ء ب ا ~ $\triangle$ ا ب جـ (مسلمة التشابه) (١)

وبالمثل $\triangle$ ء ا جـ ~ $\triangle$ ا ب جـ (٢)

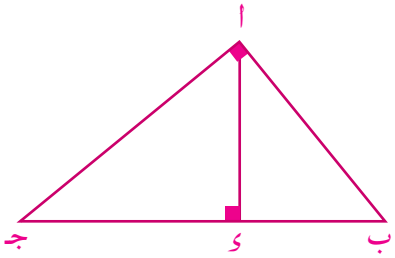
∵ المثلثان المشابهان لثالث متشابهان

∴ $\triangle$ ء ب ا ~ $\triangle$ ء ا جـ ~ $\triangle$ ا ب جـ

مثال

(٣) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، $\overline{أ_{ء}} \perp \overline{ب جـ}$ أثبت أن ء أ وسط متناسب بين ء ب، ء جـ.

الحل



المعطيات: فى $\triangle$ أ ب جـ: ق$(\angle$ أ$)$ = ٩٠°، $\overline{أ_{ء}} \perp \overline{ب جـ}$

المطلوب: إثبات أن (ء أ)^{٢} = ء ب × ء جـ

البرهان: فى $\triangle$ أ ب جـ

∵ ق$(\angle$ أ$)$ = ٩٠°، $\overline{أ_{ء}} \perp \overline{ب جـ}$

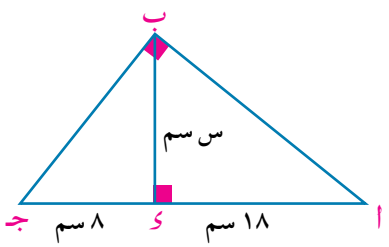
∴ $\triangle$ ء ب أ ~ $\triangle$ ء أ جـ (نتيجة)

ويكون: $\frac{ء أ}{ء جـ} = \frac{ء ب}{ء أ}$ أى أن (ء أ)^{٢} = ء ب × ء جـ

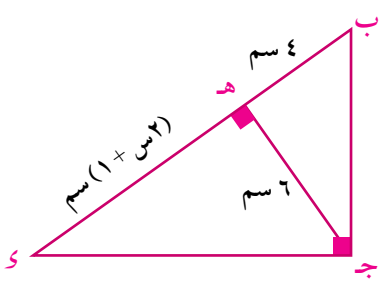
حاول أن تحل

(٤) فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية:

أ



ب



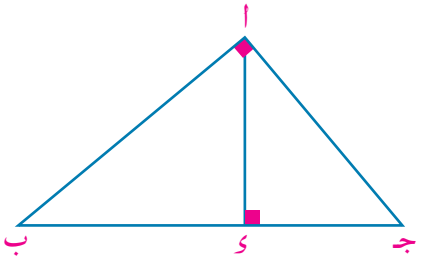
مثال

(٤) فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ،

$\overline{أ_{ء}} \perp \overline{ب جـ}$ أثبت أن:

أ (أ ب)^{٢} = ب جـ × ب ء

ب (أ جـ)^{٢} = جـ ب × جـ ء



الحل

فى $\triangle$ أ ب جـ:

∵ ق$(\angle$ أ$)$ = ٩٠°، $\overline{أ_{ء}} \perp \overline{ب جـ}$

∴ $\triangle$ أ ب ء ~ $\triangle$ جـ ب أ (نتيجة)

∴ $\frac{أ ب}{ب جـ} = \frac{ب ء}{ب أ}$ ويكون: (أ ب)^{٢} = ب جـ × ب ء

، $\triangle$ أ جـ ء ~ $\triangle$ ب جـ أ (نتيجة)

∴ $\frac{أ جـ}{ب جـ} = \frac{جـ ء}{جـ أ}$ ويكون: (أ جـ)^{٢} = جـ ب × جـ ء

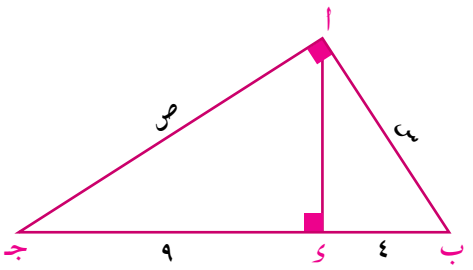
أضف إلى معلوماتك

تعد النتائج التى تم إثبات صحتها فى مثالى ٣، ٤ برهانًا لنظرية أقليدس التى سبق لك دراستها فى المرحلة الإعدادية.

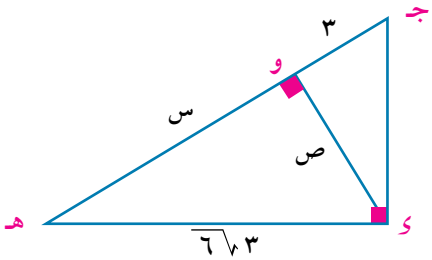
حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة س، ص العددية فى أبسط صورة (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات)

أ



ب



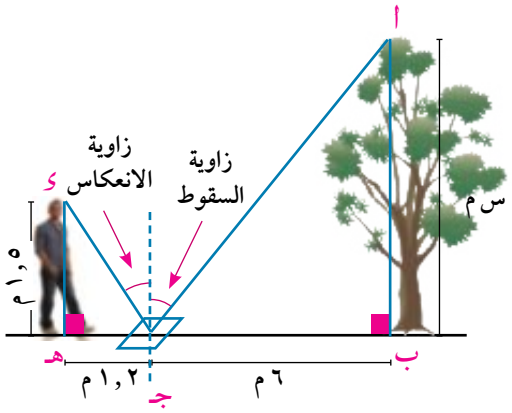
القياس غير المباشر Indirect measarement

فى بعض الحالات يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة، وفي هذه الحالة يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.

إحدى الطرق تستخدم خاصية انعكاس الضوء فى المرآة المستوية، كما فى المثال التالى.

مثال

٥ **فيزياء:** أراد يوسف أن يعرف ارتفاع إحدى الأشجار فوضع مرآة على مسافة ٦ أمتار من قاعدة الشجرة، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى قمة الشجرة فى وسط المرآة - عند هذه النقطة كان يوسف قد تحرك بعيدًا عن المرآة مسافة ١,٢ متر وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ متر فوق سطح الأرض. فإذا كانت قدماه والمرآة وقاعدة الشجرة على استقامة واحدة أوجد ارتفاع الشجرة. علمًا بأن قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.



الحل

بفرض أن ارتفاع الشجرة س مترًا، قياس زاوية السقوط = θ°

∴ قياس زاوية الانعكاس = θ°

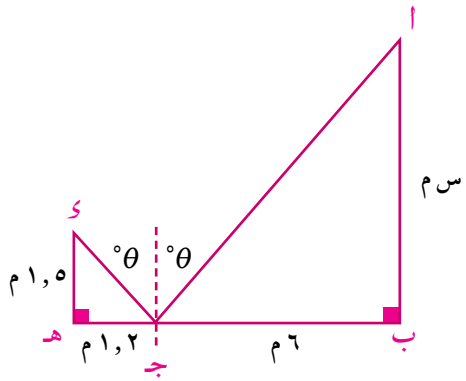
فى المثلثين ا ب جـ، ء هـ جـ

ق (∠ب) = ق (∠جـ) = ٩٠°

ق (∠ا جـ ب) = ق (∠ء جـ هـ) = $(\theta - ٩٠)^\circ$

∴ △ ا ب جـ ~ △ ء هـ جـ ويكون: $\frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\frac{\text{س}}{١,٥} = \frac{٦}{١,٢}$ ويكون س = ٧,٥ متر

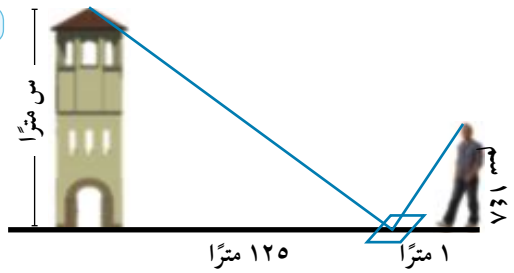


أي أن ارتفاع الشجرة يساوي ٧,٥ مترًا.

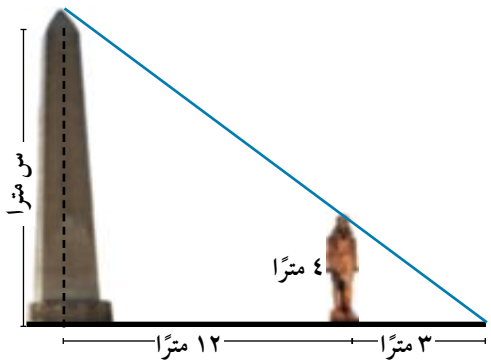
حاول أن تحل

٦ أوجد المسافة س فى كل من الحالات الآتية:

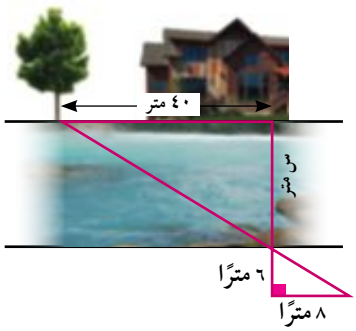
أ



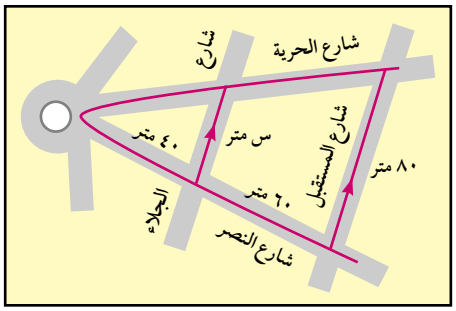
ب



ج

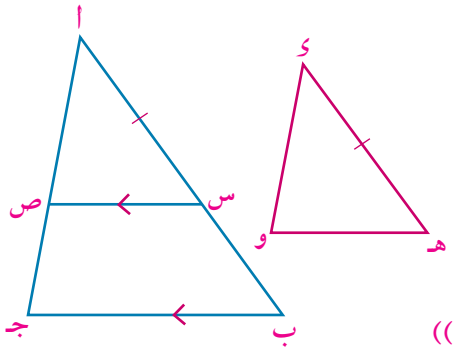


د



نظرية ١

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان.



المعطيات: المثلثان أ ب جـ ، ء هـ و فيهما $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{و ء}}$

المطلوب : $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ ء هـ و

البرهان : عين س $\in \overline{\text{أ ب}}$ حيث أ س = ء هـ ،

ارسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى ص.

∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ أ س ص (نتيجة (١))

ويكون $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ س}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ص أ}}$

∵ أ س = ء هـ (عملًا)

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{ص أ}}$ (١)

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{و ء}}$ (معطيات) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: س ص = هـ و ، ص أ = و ء

ويكون $\triangle$ أ س ص $\equiv$ $\triangle$ ء هـ و (تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها فى الآخر)

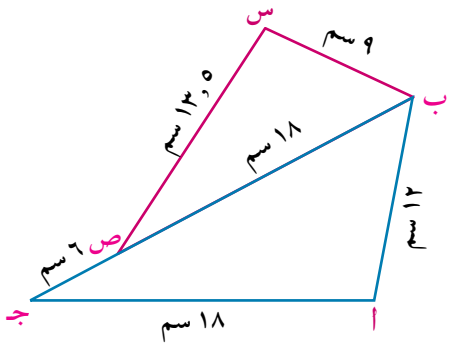
∴ $\triangle$ ء هـ و ~ $\triangle$ أ س ص

∵ $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ أ س ص (برهانا)

∴ $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ ء هـ و (وهو المطلوب)

مثال

٦ **فى الشكل المقابل:** ب، ص، جـ على استقامة واحدة. أثبت أن:



أ △ ا ب جـ ~ △ س ب ص

ب $\overleftarrow{ب جـ}$ ينصف ∠ ا ب س

الحل

أ فى المثلثين ا ب جـ، س ب ص نجد أن:

$\frac{ا ب}{س ب} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{ب جـ}{ب ص} = \frac{٦ + ١٨}{١٨} = \frac{٤}{٣}$

$\frac{ا جـ}{س ص} = \frac{١٨}{١٣,٥} = \frac{٤}{٣}$

ويكون $\frac{ا ب}{س ب} = \frac{ب جـ}{ب ص} = \frac{ا جـ}{س ص}$ أى أن الأضلاع المتناظرة متناسبة

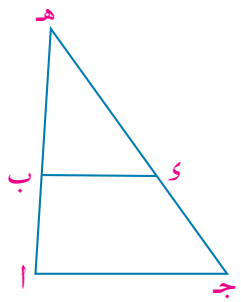
∴ △ ا ب جـ ~ △ س ب ص

ب ∵ △ ا ب جـ ~ △ س ب ص ∴ ق (∠ ا ب جـ) = ق (∠ س ب ص)

أي أن: $\overleftarrow{ب جـ}$ ينصف ∠ ا ب س

٧ **في الشكل المقابل:** $\overleftarrow{ا ب} \cap \overleftarrow{جـ ء} = \{هـ\}$ حيث $\frac{ا هـ}{جـ هـ} = \frac{ب هـ}{ء هـ}$، $\frac{ا جـ}{جـ هـ} = \frac{ب ء}{ء هـ}$ أثبت أن $\overleftrightarrow{ا جـ} // \overleftrightarrow{ب ء}$

الحل



∵ $\frac{ا هـ}{جـ هـ} = \frac{ب هـ}{ء هـ}$ ∴ $\frac{ا هـ}{ب هـ} = \frac{جـ هـ}{ء هـ}$ (من خواص التناسب) (١)

∵ $\frac{ا جـ}{جـ هـ} = \frac{ب ء}{ء هـ}$ ∴ $\frac{ا جـ}{ب ء} = \frac{جـ هـ}{ء هـ}$ (من خواص التناسب) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{ا هـ}{ب هـ} = \frac{جـ هـ}{ء هـ} = \frac{جـ ا}{ء ب}$

أي أن △ ا هـ جـ ~ △ ب هـ ء

∴ ق(∠ ا جـ هـ) = ق(∠ ب ء هـ)

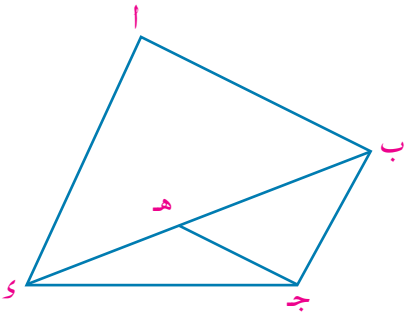
وهما فى وضع تناظر بالنسبة للقاطع $\overleftarrow{جـ هـ}$

∴ $\overleftrightarrow{ا جـ} // \overleftrightarrow{ب ء}$

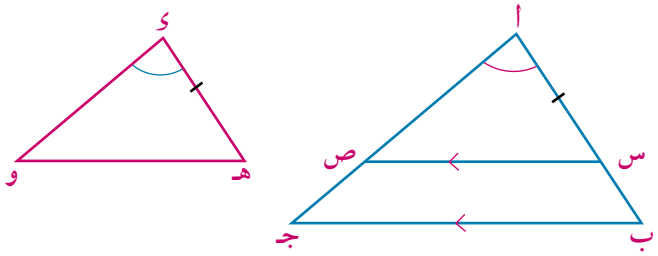
حاول أن تحل

٧ ا ب جـ ء شكل رباعي، هـ ∈ $\overline{ب ء}$ حيث: $\frac{ا ب}{ء ا} = \frac{جـ هـ}{ب جـ}$، $\frac{ب ء}{ء ا} = \frac{هـ ب}{ب جـ}$ أثبت أن:

أ $\overline{ا ء} // \overline{ب جـ}$ ب $\overline{ا ب} // \overline{جـ هـ}$



نظرية ٢ إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين.



المعطيات: $\angle$ ا $\equiv \angle$ ء ، $\frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ء و}}$

المطلوب: $\triangle$ ا ب جـ $\sim \triangle$ ء هـ و

البرهان: خذ س $\in \overline{\text{ا ب}}$ حيث ا س = ء هـ

وارسم $\overleftarrow{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$

ويقطع $\overline{\text{ا جـ}}$ فى ص

$\because \overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ $\therefore \triangle$ ا ب جـ $\sim \triangle$ ا س ص (نتيجة) (١)

ويكون $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ا ص}}$

$\because \frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ء و}}$ (معطى) ، ا س = ء هـ (عملا)

$\therefore \frac{\text{ا ب}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ا جـ}}{\text{ء و}}$ ويكون ا ص = ء و

$\therefore \triangle$ ا س ص $\equiv \triangle$ ء هـ و (ضلعان وازوية محصورة)

ويكون $\triangle$ ا س ص $\sim \triangle$ ء هـ و (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\triangle$ ا ب جـ $\sim \triangle$ ء هـ و وهو المطلوب.

مثال

(٨) ا ب جـ مثلث، ا ب = ٨سم ، ا جـ = ١٠سم ، ب جـ = ١٢سم ، هـ $\in \overline{\text{ا ب}}$ حيث ا هـ = ٢سم ، ء $\in \overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب ء = ٤سم.

أ برهن أن $\triangle$ ب ء هـ $\sim \triangle$ ب ا جـ واستنتج طول $\overline{\text{ء هـ}}$.

ب برهن أن الشكل ا جـ ء هـ رباعى دائرى.

الحل

$\because$ ا ب = ٨سم ، ا هـ = ٢سم $\therefore$ ب هـ = ٦سم

أ المثلثان ب ء هـ ، ب ا جـ فيهما:

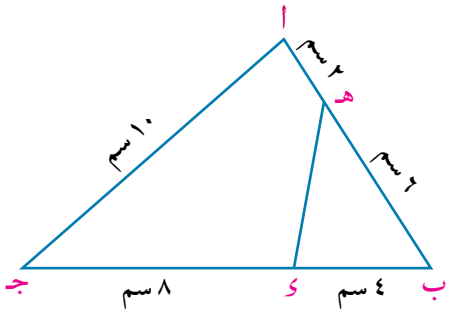
$\angle$ء ب هـ $\equiv \angle$ ا ب جـ (١)

، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب ا}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{\text{ب ء}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) $\therefore \triangle$ ب ء هـ $\sim \triangle$ ب ا جـ (نظرية)

من التشابه $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ا جـ}} = \frac{١}{٢}$ $\therefore$ ء هـ $= \frac{١}{٢}$ ا جـ ، ء هـ $= \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$سم



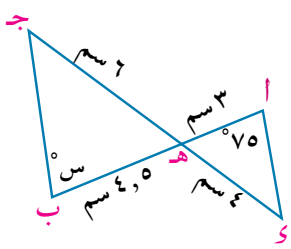
ب من التشابه أيضًا ∠ب ء هـ ≡ ∠ب أ جـ ∴ ق(∠ب ء هـ) = ق(∠ب أ جـ)

∵ ∠ب ء هـ خارجة عن الشكل الرباعي أ جـ ء هـ ∴ الشكل أ جـ ء هـ رباعي دائري.

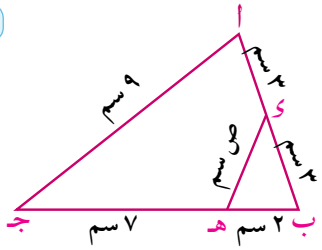
حاول أن تحل

٨ فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس مفسرًا إجابتك.

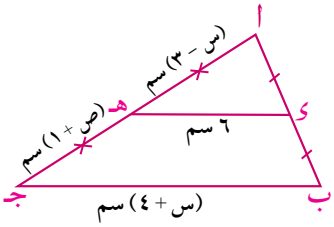
أ



ب



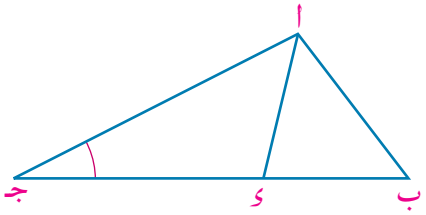
ج



مثال

٩ أ ب جـ مثلث، ء ∈ ب جـ حيث (أ جـ)^{٢} = جـ ء × جـ ب أثبت أن: △ أ جـ ء ~ △ ب جـ أ

الحل



المثلثان أ ب جـ، ء أ جـ فيهما ∠جـ مشتركة (١)

∵ (أ جـ)^{٢} = جـ ء × جـ ب

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{أ جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن △ أ جـ ء ~ △ ب جـ أ (نظرية)

حاول أن تحل

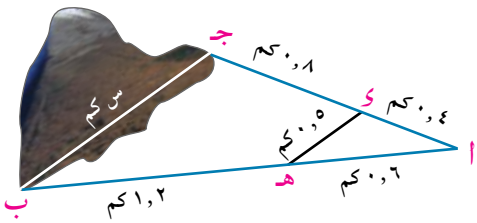
٩ أ ب جـ، ء هـ و مثلثان متشابهان، س منتصف ب جـ، ص منتصف هـ و أثبت أن:

أ △أ ب س ~ △ء هـ ص ب أ س × ء هـ = أ ب × ء ص

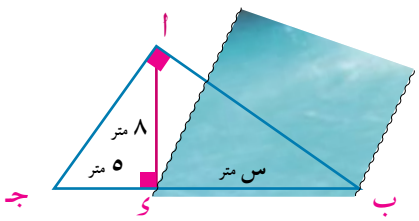
تحقق من فهمك

فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س.

أ



ب



٢ - ٣ العلاقة بين مساحتي سطحى مضلعين متشابهين

The Relation Between the Area of two Similar Polygons

سوف تتعلم

- العلاقة بين محيطى مضلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.
- العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

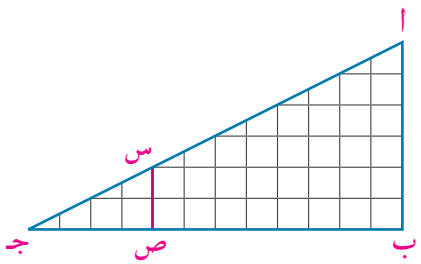
- محيط Perimeter
- مساحة Area
- مساحة مضلع Area of a Polygon
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides

الأدوات والوسائل

- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- آلة حاسبة

فكر و ناقش

على ورق مربعات رسم كل من المثلثين أ ب جـ ، س ص جـ.



١- بين لماذا يكون:

$\triangle$ س ص جـ ~ $\triangle$ أ ب جـ؟ أوجد معامل التشابه عندئذٍ.

٢- احسب النسبة بين مساحة المثلث س ص جـ إلى مساحة المثلث الأصلى أ ب جـ

٣- عين نقطة أخرى مثل ء ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$، ثم ارسم $\overleftarrow{\text{ء ء'}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء' لتحصل على المثلث ء ء' جـ، هل $\triangle$ ء ء' جـ ~ $\triangle$ س ص جـ؟

٤- أكمل الجدول التالي:

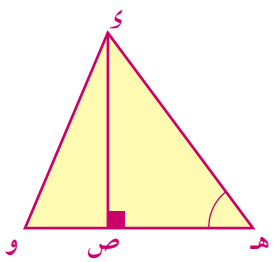
المثلثات	معامل التشابه	مساحة المثلث الأول	مساحة المثلث الثاني	النسبة بين مساحة المثلث الأول ومساحة المثلث الثاني
$\triangle$ س ص جـ ~ $\triangle$ أ ب جـ	$\frac{١}{٣}$	٤	٣٦	$\frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$
$\triangle$ ء ء' جـ ~ $\triangle$ أ ب جـ				
$\triangle$ س ص جـ ~ $\triangle$ ء ء' جـ				

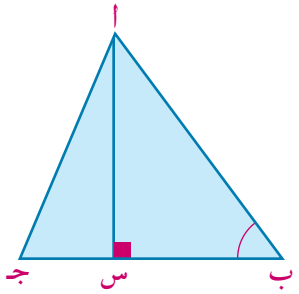
٥- ماذا تعنى النسب التي حصلت عليها مقارنة بمعامل التشابه (نسبة التشابه)؟

أولًا: النسبة بين مساحتي سطحى مثلثين متشابهين:

نظرية ٣

النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.





المعطيات: $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ ء هـ و

المطلوب: $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}\right)^2 = \left(\frac{\text{جـ أ}}{\text{و ء}}\right)^2$

لاحظ
الرمز م يعبر عن مساحة سطح المضلع

البرهان: ارسم $\overleftarrow{\text{أ س}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ حيث $\overleftarrow{\text{أ س}} \cap \overline{\text{ب جـ}} = \{\text{س}\}$،

$\overleftarrow{\text{ء ص}} \perp \overline{\text{هـ و}}$ حيث $\overleftarrow{\text{ء ص}} \cap \overline{\text{هـ و}} = \{\text{ص}\}$

$\because \triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ء هـ و}$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{ق}(\angle \text{هـ})$، $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{و ء}}$ (١)

فى المثلثين أ ب س، ء هـ ص:

$\text{ق}(\angle \text{س}) = \text{ق}(\angle \text{ص}) = 90°$ ، $\text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{ق}(\angle \text{هـ})$

$\therefore \triangle \text{أ ب س} \sim \triangle \text{ء هـ ص}$ (مسلمة التشابه)

ويكون: $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}$ (٢)

$$\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \frac{\frac{1}{2} \text{ب جـ} \times \text{أ س}}{\frac{1}{2} \text{هـ و} \times \text{أ ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} \times \frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}$$

بالتعويض من (١)، (٢) ينتج أن:

$\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} \times \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}\right)^2 = \left(\frac{\text{جـ أ}}{\text{و ء}}\right)^2$ وهو المطلوب.

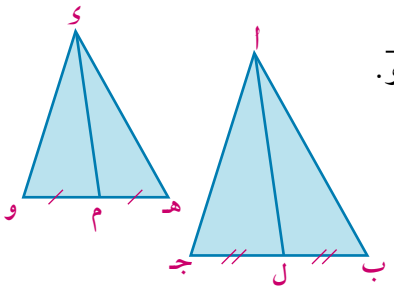
لاحظ أن: $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^2$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}$

فيكون: $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}\right)^2$

أى أن النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما.

تفكير نافذ:

١- إذا كان $\triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ء هـ و}$، ل منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$، م منتصف $\overline{\text{هـ و}}$.



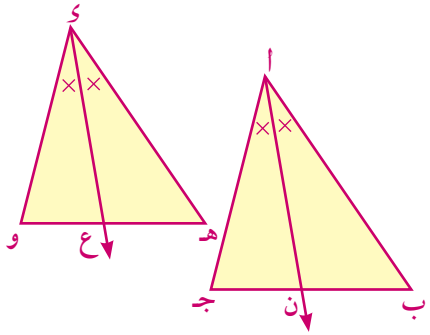
هل $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{ء م}}\right)^2$ ؟

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.

٢- إذا كان $\triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ء هـ و}$،

$\overleftarrow{\text{أ ن}}$ ينصف $\angle \text{أ}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ن،

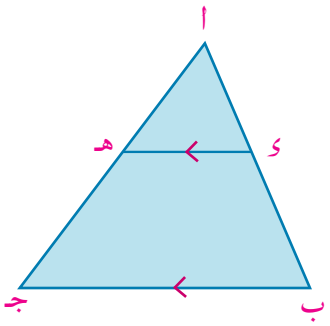
$\overleftarrow{\text{ء ع}}$ ينصف $\angle \text{ء}$ ويقطع $\overline{\text{هـ و}}$ فى ع.



هل $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{ء ع}}\right)^2$ ؟

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.

مثال



(١) **في الشكل المقابل:** ا ب جـ مثلث، ء ∈ $\overline{\text{ا ب}}$

حيث $\frac{\text{ا ء}}{\text{ء ب}} = \frac{٣}{٤}$ ، $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{ا جـ}}$ في هـ.

إذا كانت مساحة △ ا ب جـ = ٧٨٤سم^{٢}. أوجد:

(أ) مساحة △ ا ء هـ. (ب) مساحة شبه المنحرف ء ب جـ هـ.

الحل

في △ا ء جـ: ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ △ ا ء هـ ~ △ ا ب جـ (نتيجة)

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{ا ء هـ})}{\text{م}(\triangle \text{ا ب جـ})} = \left(\frac{\text{ا ء}}{\text{ا ب}}\right)^{٢}$ (نظرية)

ويكون $\frac{\text{م}(\triangle \text{ا ء هـ})}{٧٨٤} = \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢}$ ∴ م(△ ا ء هـ) = $\frac{٩}{٤٩} \times ٧٨٤ = ١٤٤$سم^{٢}

∵ مساحة شبه المنحرف ء ب جـ هـ = مساحة △ ا ب جـ − مساحة △ ا ء هـ

∴ مساحة شبه المنحرف ء ب جـ هـ = ٧٨٤ − ١٤٤ = ٦٤٠سم^{٢}

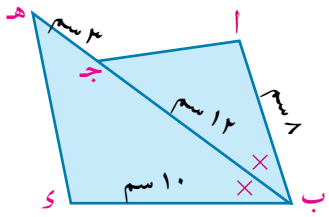
حاول أن تحل

(١) **في الشكل المقابل:**

$\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ منصف ∠ ا ب ء

، م(△ ا ب جـ) = ٤٨ سم^{٢}

أوجد: م(△ هـ ب ء)



مثال

(٢) النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي ٤ : ٩ فإذا كان محيط المثلث الأكبر ٩٠سم أوجد محيط المثلث الأصغر.

الحل

بفرض أن △ ا ب جـ ~ △ ء هـ و

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{ا ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$ ويكون $\frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{محيط } \triangle \text{ ا ب جـ}}{\text{محيط } \triangle \text{ ء هـ و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{٢}{٣} < ١$

∴ محيط △ ا ب جـ < محيط △ ء هـ و

ويكون $\frac{\text{محيط } (\triangle \text{ ا ب جـ})}{٩٠} = \frac{٢}{٣}$ ∴ محيط △ ا ب جـ = ٦٠سم

حاول أن تحل

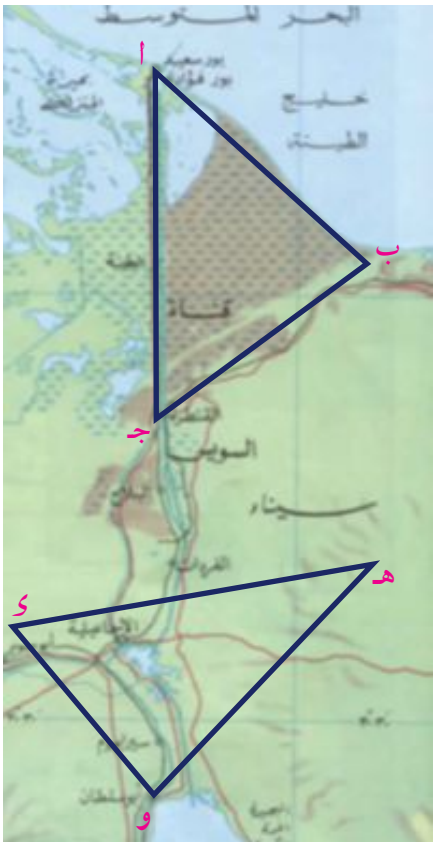
(٢) أ ب جـ، ء هـ و مثلثان متشابهان، $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \frac{٣}{٤}$

(أ) إذا كان محيط المثلث الأصغر ٣\٤٥ سم. أوجد محيط المثلث الأكبر.

(ب) إذا كان هـ و = ٢٨سم أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

مثال

(٣) إذا كان كل ١ سم على الخريطة يمثل ١٠ كيلومترًا.
أوجد المساحة الحقيقية التي يمثلها المثلث أ ب جـ لأقرب كيلو متر مربع إذا كان م(△أ ب جـ) = ٦,٤سم^{٢}



الحل

مقياس الرسم = معامل التشابه = $\frac{١}{١٠ \times ١٠^{٥}}$

$\frac{\text{مساحة } \triangle \text{أ ب جـ}}{\text{المساحة الحقيقية}}$ = مربع معامل التشابه

$\frac{٦,٤}{\text{المساحة الحقيقية}} = \left(\frac{١}{١٠ \times ١٠^{٥}}\right)^{٢}$

المساحة الحقيقة = ٦,٤ × ١٠ × ١٠ × ١٠^{٥} × ١٠^{٥} سم^{٢}

≃ ٦٤٠ كم^{٢}

حاول أن تحل

(٣) (أ) فى الخريطة المبينة أعلاه احسب مساحة المثلث ء هـ و بالسنتيمترات المربعة واستخدامها فى تقدير المساحة الحقيقية التي يمثلها لأقرب كيلو مربع.

(ب) باستخدام إحدى خرائط جمهورية مصر العربية احسب مساحة شبه جزيرة سيناء لأقرب مائة كيلو متر مربع - قارن إجابتك مع زملائك.

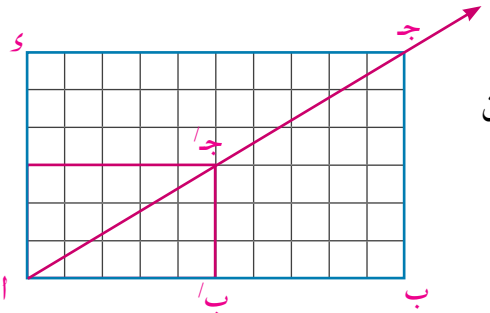
ثانيًا النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين The ratio between the area of two similar polygons

عمل تعاونى

اعمل مع زميل لك لبحث إمكانية تقسيم المضلعين المتشابهين إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

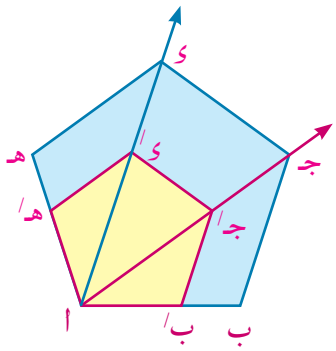
١- ارسم مضلعات متشابهة كما فى شكل (١)، شكل (٢).

٢- فى شكل (١) ارسم $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$. ماذا تلاحظ؟



شكل (١)

٣- فى شكل (٢) إرسم $\overleftarrow{أ و}$. ماذا تلاحظ؟ هل تجد تفسيرًا لذلك؟



شكل (٢)

لاحظ أن

فى المثلثين أ ب/ جـ/، أ ب جـ

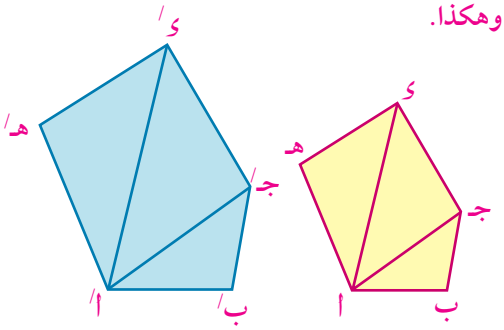
ق(∠ أ ب/ جـ/) = ق(∠ب) من تشابه المضلعين

فيكون $\overline{ب/ جـ/}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ Δ أ ب/ جـ/ ~ Δ أ ب جـ (نتيجة)

وبالمثل ق (∠ أ هـ/ د/) = ق(∠هـ)

∴ $\overline{هـ/ د/}$ // $\overline{هـ د}$ ويكون Δ أ هـ/ د/ ~ Δ أ هـ د وهكذا.

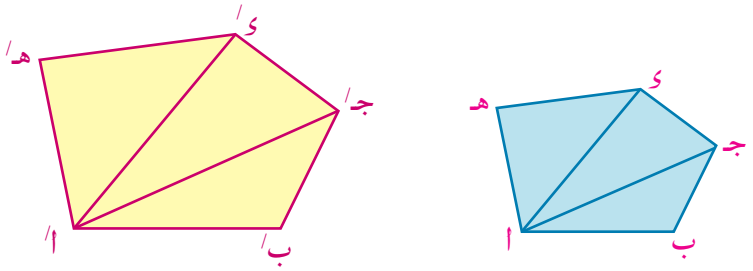


حقيقة: المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

ملاحظة: الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع فى المضلعين المتشابهين، (المضلعان المتشابهان لهما نفس العدد من الأضلاع) فإذا كان عدد أضلاع المضلع = ن ضلعًا فإن عدد المثلثات التى يمكن أن ينقسم إليها المضلع (عن طريق أقطاره المشتركة فى نفس الرأس) = ن – ٢ مثلثًا.

نظرية ٤

النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.



المعطيات: المضلع أ ب جـ د هـ ~ المضلع أ/ ب/ جـ/ د/ هـ/

المطلوب: $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب جـ د هـ)}}{\text{مـ (المضلع أ/ ب/ جـ/ د/ هـ/)}} = \left(\frac{أ ب}{أ/ ب/}\right)^{٢}$

البرهان: من أ، أ/ نرسم $\overline{أ جـ}$، $\overline{أ د}$، $\overline{أ/ جـ/}$، $\overline{أ/ د/}$

∵ المضلع أ ب جـ د هـ ~ المضلع أ/ ب/ جـ/ د/ هـ/

∴ فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات، كل يشابه نظيره (حقيقة). ويكون:

$\frac{\text{مـ}(\Delta أ ب جـ)}{\text{مـ}(\Delta أ/ ب/ جـ/)} = \left(\frac{ب جـ}{ب/ جـ/}\right)^{٢}$ ، $\frac{\text{مـ}(\Delta أ جـ د)}{\text{مـ}(\Delta أ/ جـ/ د/)} = \left(\frac{جـ د}{جـ/ د/}\right)^{٢}$ ، $\frac{\text{مـ}(\Delta أ د هـ)}{\text{مـ}(\Delta أ/ د/ هـ/)} = \left(\frac{د هـ}{د/ هـ/}\right)^{٢}$

∴ $\frac{ب جـ}{ب/ جـ/} = \frac{جـ د}{جـ/ د/} = \frac{د هـ}{د/ هـ/} = \frac{أ ب}{أ/ ب/}$ (من تشابه المضلعين)

$\therefore \frac{\text{مـ}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{مـ}(\triangle \text{أ' ب' جـ'})} = \frac{\text{مـ}(\triangle \text{أ جـ ء})}{\text{مـ}(\triangle \text{أ' جـ' ء'})} = \frac{\text{مـ}(\triangle \text{أ ء هـ})}{\text{مـ}(\triangle \text{أ' ء' هـ'})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^{٢}$

ومن خواص التناسب

$\frac{\text{مـ}(\triangle \text{أ ب جـ}) + \text{مـ}(\triangle \text{أ جـ ء}) + \text{مـ}(\triangle \text{أ ء هـ})}{\text{مـ}(\triangle \text{أ' ب' جـ'}) + \text{مـ}(\triangle \text{أ' جـ' ء'}) + \text{مـ}(\triangle \text{أ' ء' هـ'})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^{٢}$

ويكون: $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب جـ ء هـ)}}{\text{مـ (المضلع أ' ب' جـ' ء' هـ')}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^{٢}$ وهو المطلوب

ملاحظة

$\left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}\right)^{٢} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ' ب'})^{٢}}$

حاول أن تحل

٤ أ إذا كان المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع أ' ب' جـ' ء'، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}} = \frac{١}{٣}$ فاكتب ما يساويه كلٌّ من:

$\frac{\text{مـ (المضلع أ ب جـ ء)}}{\text{مـ (المضلع أ' ب' جـ' ء')}}$ ، $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء}}{\text{محيط المضلع أ' ب' جـ' ء'}}$

ب إذا كان المضلعان أ ب جـ ء هـ، أ' ب' جـ' ء' هـ' متشابهان والنسبة بين مساحتي سطحيهما ٤ : ٢٥

فاكتب ما يساويه كل من: $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ' ب'}}$ ، $\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ ء هـ}}{\text{محيط المضلع أ' ب' جـ' ء' هـ'}}$

جـ إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ١ : ٤، مساحة المضلع الأول ٢٥سم^{٢} .أوجد مساحة المضلع الثاني.

د إذا كان طولا ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين هما ١٢سم، ١٦سم، وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥سم^{٢}. فإوجد مساحة المضلع الأكبر.

مثال

٤ أ ب جـ ء، س ص ع ل مضلعان متشابهان فيهما: قـ(∠أ) = ٤٠° ، س ص = $\frac{٣}{٤}$ أ ب ، جـ ء = ١٦سم.

احسب: **أولًا:** قـ(∠س) **ثانيًا:** طول $\overline{\text{ع ل}}$ **ثالثًا:** مـ(المضلع أ ب جـ ء) : مـ (المضلع س ص ع ل)

الحل

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ قـ(∠أ) = قـ(∠س) فيكون قـ(∠س) = ٤٠° (المطلوب أولًا)

∵ س ص = $\frac{٣}{٤}$ أ ب ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{٤}{٣}$ (من خواص التناسب)

من تشابه المضلعين نجد أيضًا $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ع ل}}$

∴ $\frac{٤}{٣} = \frac{١٦}{\text{ع ل}}$ فيكون ع ل = $\frac{٣ \times ١٦}{٤}$ = ١٢سم (المطلوب ثانيًا)

مـ(المضلع أ ب جـ ء) : مـ (المضلع س ص ع ل) = (أ ب)^{٢} : (س ص)^{٢}

= ١٦ك^{٢} : ٩ك^{٢}

١٦ : ٩ (المطلوب ثالثًا)

لاحظ أن

أ ب = ٤ك

س ص = ٣ك

ك ≠ ٠

مثال

(٥) النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣ : ٤. إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ٢٢٥سم^{٢} فأوجد مساحة كل منهما.

الحل

∵ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = ٣ : ٤

∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٤

بفرض أن مساحة المضلع الأول = ٩س ، مساحة المضلع الثاني = ١٦س

∴ ٩س + ١٦س = ٢٢٥ ويكون س = $\frac{٢٢٥}{٩+١٦}$ = ٩

∴ مساحة المضلع الأول = ٩ × ٩ = ٨١سم^{٢}

∴ مساحة المضلع الثاني = ١٦ × ٩ = ١٤٤سم^{٢}

حاول أن تحل

(٥) **الربط مع الزراعة:** مزرعتان على شكل مضلعين متشابهين، النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣ إذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ فدانًا، فأوجد مساحة كل منهما.

مثال

(٦) أ ب جـ ء، س ص ع ل مضلعان متشابهان. تقاطع قُطرى الأول فى م وتقاطع قُطرى الثاني فى ن.

أثبت أن مـ(المضلع أ ب جـ ء) : مـ(المضلع س ص ع ل) = (م جـ)^{٢} : (ن ع)^{٢}

الحل

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ △ أ ب جـ ~ △ س ص ع

، △ ء ب جـ ~ △ ل ص ع (حقيقة)

∴ △ م ب جـ ~ △ ن ص ع (لماذا)

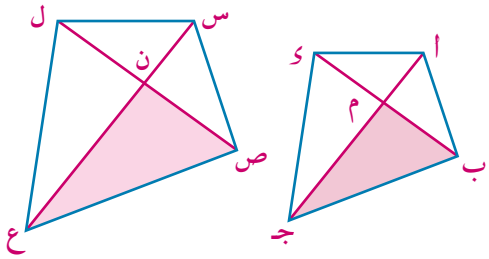
ويكون $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{ن ع}}$ (١)

∵ المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب جـ ء)}}{\text{مـ (المضلع س ص ع ل)}} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}\right)^{٢}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن:

مـ (المضلع أ ب جـ ء) : مـ(المضلع س ص ع ل) = (م جـ)^{٢} : (ن ع)^{٢}

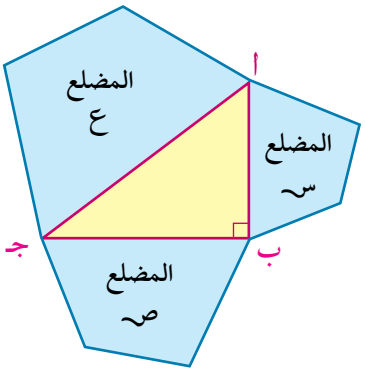


حاول أن تحل

٦ أ ب جـ ء، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{ب جـ}$، ن منتصف $\overline{ص ع}$ فأثبت أن:
مـ(المضلع أ ب جـ ء) : مـ(المضلع س ص ع ل) = (م ء)^{٢} : (ن ل)^{٢}

مثال

٧ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب، فإذا كانت $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ جـ}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة منشأة على أضلاع المثلث أ ب جـ و هى على الترتيب: المضلع سـ، المضلع صـ، المضلع ع.
فأثبت أن مـ(المضلع سـ) + مـ(المضلع صـ) = مـ(المضلع ع)



الحل

∵ المضلع سـ ~ المضلع ع ∴ $\frac{\text{مـ (المضلع سـ)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

∵ المضلع صـ ~ المضلع ع ∴ $\frac{\text{مـ (المضلع صـ)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} = \frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع سـ)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} + \frac{\text{مـ (المضلع صـ)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}} + \frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$

$= \frac{(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{أ جـ})^{٢}}$ (١)

∵ ق(∠ب) = ٩٠° ∴ (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن $\frac{\text{مـ (المضلع سـ)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} + \frac{\text{مـ (المضلع صـ)}}{\text{مـ (المضلع ع)}} = ١$

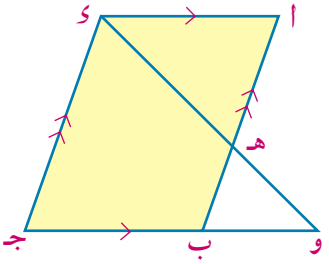
ويكون مـ(المضلع سـ) + مـ(المضلع صـ) = مـ(المضلع ع)

حاول أن تحل

٧ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ، فيه أ ب = ٥سم، ب جـ = ١٣ سم، حيث $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ جـ}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة ل، م، ن منشأة على أضلاع المثلث أ ب جـ من الخارج على الترتيب.
فإذا كانت مساحة سطح المضلع ل تساوى ١٠٠سم^{٢} أوجد مساحة سطح كل من المضلعين م، ن.

تحقق من فهمك

فى الشكل المقابل: أ ب جـ ء متوازى أضلاع،
هـ ∈ $\overline{أ ب}$ حيث $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٣}{٢}$، $\overleftarrow{ء هـ} \cap \overleftarrow{جـ ب} = \{و\}$



١ أثبت أن △ ء جـ و ~ △ هـ أ ء

٢ أوجد $\frac{\text{مـ (△ ء جـ و)}}{\text{مـ (△ هـ أ ء)}}$

٤ - ٢ تطبيقات التشابه فى الدائرة

Applications of Similarity in the circle

سوف تتعلم

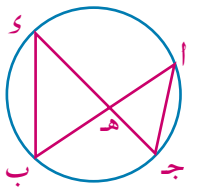
- العلاقة بين وترين متقاطعين فى دائرة.
- العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- العلاقة بين طول مماس وطولى جزأي قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- نمذجة وحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات فى الدائرة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

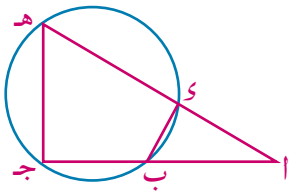
- وتر Chord
- قاطع Secant
- مماس Tangent
- قطر Diameter
- مماس خارجى مشترك Common External Tangent
- مماس داخلى مشترك Common Internal Tangent
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles

فكر و ناقش

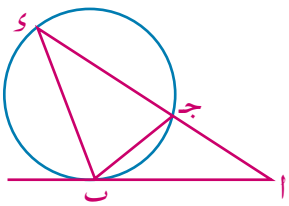
فى كل من الأشكال الآتية مثلثان متشابهان. اكتب المثلثين بترتيب تطابق زواياهما واستنتج تناسب الأضلاع المتناظرة.



شكل (١)



شكل (٢)



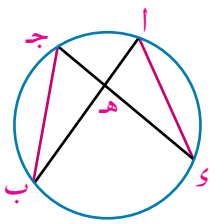
شكل (٣)

- فى شكل (١): هل توجد علاقة بين هـ أ × هـ ب ، هـ جـ × هـ ء؟
- فى شكل (٢): هل توجد علاقة بين أ هـ × أ ء ، أ جـ × أ ب؟
- فى شكل (٣): هل توجد علاقة بين أ ء × أ جـ ، (أ ب)^{٢}؟

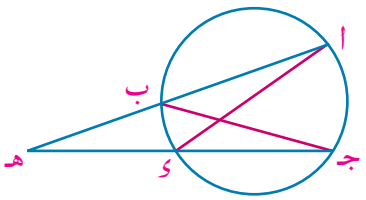
تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين $\overline{أب}$ ، $\overline{جـء}$ لدائرة فى نقطة هـ فإن:

هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء



شكل (١)



شكل (٢)

لاستنتاج ذلك:

- ارسم $\overline{أء}$ ، $\overline{ب جـ}$
- فى كل من الشكلين أثبت أن المثلثين هـ أ ء، هـ جـ ب متشابهان فيكون:

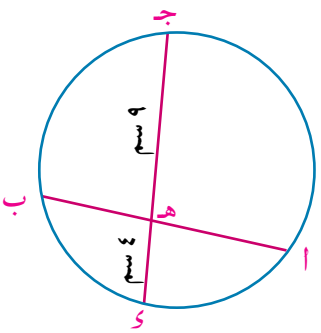
$\frac{هـ أ}{هـ جـ} = \frac{هـ ء}{هـ ب}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

مثال

(١) فى الشكل المقابل: $\overline{أب} \cap \overline{جـ ء} = \{هـ\}$

وإذا كان $\frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{٤}{٣}$، هـ جـ = ٩سم ، هـ ء = ٤سم

أوجد طول $\overline{هـ ب}$



الحل

∵ $\frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{٤}{٣}$ ∴ هـ أ = ٤ك ، هـ ب = ٣ك حيث ك ≠ ٠

∵ $\overline{أب} \cap \overline{جـ ء} = \{هـ\}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء (تمرين مشهور)

فيكون: ٤ك × ٣ك = ٩ × ٤

١٢ك^{٢} = ٣٦

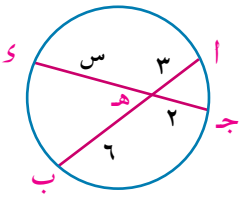
ك^{٢} = ٣

ك = $\sqrt{٣}$ ، هـ ب = ٣$\sqrt{٣}$ سم

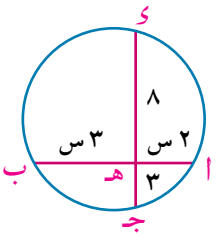
حاول أن تحل

(١) أوجد قيمة س فى كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

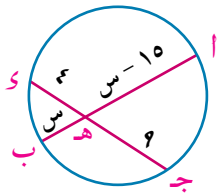
أ



ب



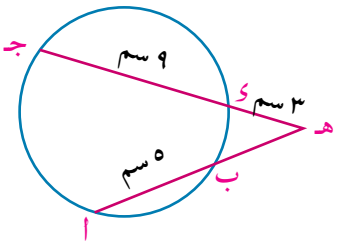
جـ



مثال

(٢) فى الشكل المقابل: $\overleftarrow{أب} \cap \overleftarrow{جـ ء} = \{هـ\}$ ، أ ب = ٥سم،

جـ ء = ٩سم ، هـ ء = ٣سم. أوجد طول $\overline{ب هـ}$



الحل

بفرض أن ب هـ = س سم.

∵ $\overleftarrow{أب} \cap \overleftarrow{جـ ء} = \{هـ\}$ ∴ هـ ب × هـ أ = هـ ء × هـ جـ (تمرين مشهور)

فيكون: س (س + ٥) = ٣ (٣ + ٩)

س^{٢} + ٥س − ٣٦ = صفر

(س − ٤) (س + ٩) = صفر

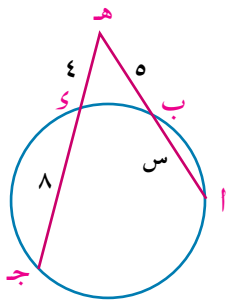
∴ س = ٤ ، س = −٩ مرفوض

∴ طول $\overline{ب هـ}$ = ٤سم.

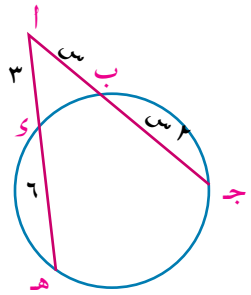
حاول أن تحل

(٢) أوجد قيمة س فى كل من الأشكال الآتية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

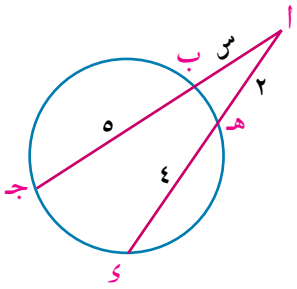
أ



ب



جـ



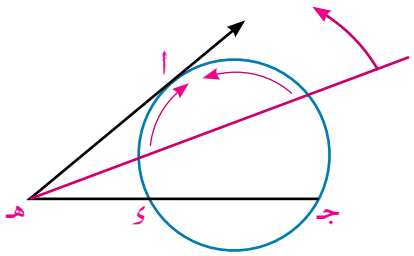
نتيجة ١

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن حاصل ضرب طول القاطع فى طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول المماس.

فى الشكل المقابل: $\overleftarrow{هـ\,ا}$ مماس للدائرة

$\overleftarrow{هـ\,جـ}$ يقطع الدائرة ى، جـ

$\therefore (هـ\,ا)^{٢} = هـ\,ى \times هـ\,جـ$

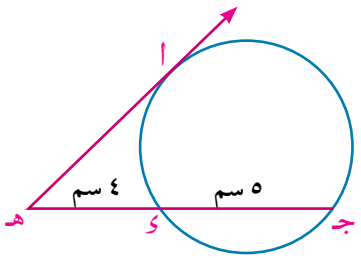


مثال

(٣) **فى الشكل المقابل:** $\overleftarrow{هـ\,ا}$ مماس للدائرة،

$\overleftarrow{هـ\,جـ}$ يقطع الدائرة فى ى، جـ على الترتيب.

حيث هـ ى = ٤سم ، جـ ى = ٥سم ، أوجد طول $\overline{هـ\,ا}$



الحل

$\because \overleftarrow{هـ\,ا}$ مماس، $\overleftarrow{هـ\,جـ}$ قاطع للدائرة

$\therefore (هـ\,ا)^{٢} = هـ\,ى \times هـ\,جـ$ (نتيجة)

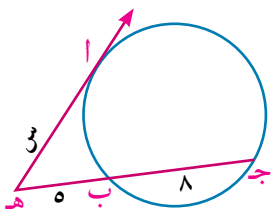
$(هـ\,ا)^{٢} = ٤(٤ + ٥) = ٣٦$

$\therefore هـ\,ا = ٦$سم

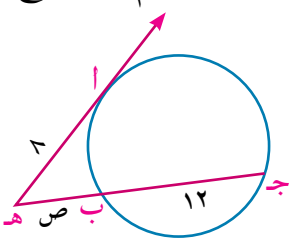
حاول أن تحل

(٣) فى كل من الأشكال التالية $\overleftarrow{هـ\,ا}$ مماس للدائرة. أوجد قيم س، ص، ع العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

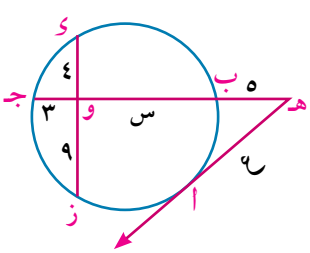
أ



ب

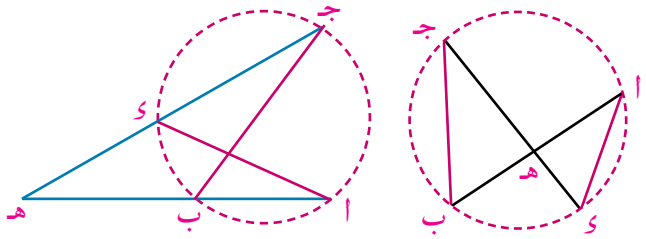


جـ



عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ فى نقطة هـ (مختلفة عن أ، ب، جـ، ء)
وكان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء فإن : النقط أ، ب، جـ، ء تقع على دائرة واحدة.



لاحظ أن:

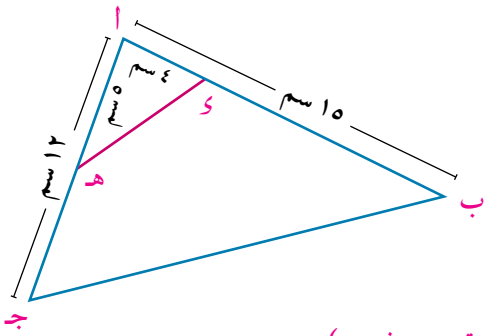
هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

فيكون $\frac{هـ أ}{هـ جـ} = \frac{هـ ء}{هـ ب}$

- هل Δ هـ أ ء ~ Δ هـ جـ ب؟ لماذا؟
- هل ق (∠ أ) = ق (∠ جـ)؟ لماذا؟
- هل النقط أ، ء، ب، جـ تقع على دائرة واحدة؟ فسِّر إجابتك.

مثال

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٥سم، أ جـ = ١٢سم. ء ∈ $\overline{أب}$ حيث أ ء = ٤سم، هـ ∈ $\overline{أجـ}$ حيث أ جـ = ٥سم.
أثبت أن الشكل ء ب جـ هـ رباعي دائرى.



الحل

∵ أ ء × أ ب = ٤ × ١٥ = ٦٠،

أ هـ × أ جـ = ٥ × ١٢ = ٦٠

∴ أ ء × أ ب = أ هـ × أ جـ

∵ $\overleftarrow{ب ء}$ ∩ $\overleftarrow{جـ هـ}$ = {أ} ، أ ء × أ ب = أ هـ × أ جـ

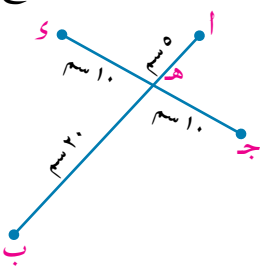
∴ النقط ء، ب جـ، هـ تقع على دائرة واحدة (عكس تمرين مشهور)

ويكون الشكل ء ب جـ هـ رباعيًا دائريًا

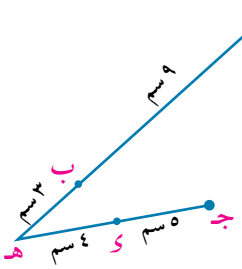
حاول أن تحل

(٤) فى أيٍّ من الأشكال التالية تقع النقط أ، ب، جـ، ء على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.

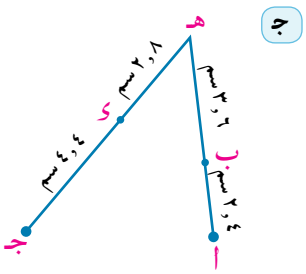
أ

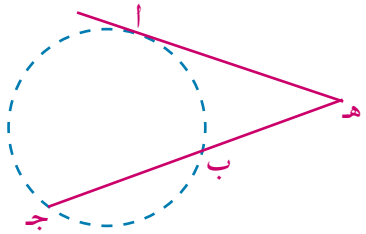


ب



جـ



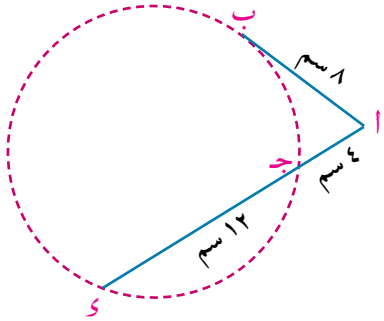


نتيجة ٢

إذا كان (هـ أ)^{٢} = هـ ب × هـ جـ
فإن $\overline{هـ أ}$ تمس الدائرة المارة بالنقط أ، ب، جـ

مثال

(٥) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨سم، أ جـ = ٤سم، ء ∈ $\overleftrightarrow{أجـ}$، ء ∉ $\overline{أجـ}$ حيث جـ ء = ١٢سم.
أثبت أن $\overline{أب}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء



الحل

∵ أ جـ × أ ء = ٤ (٤ + ١٢) = ٦٤

، (أ ب)^{٢} = (٨)^{٢} = ٦٤

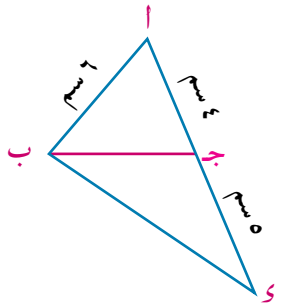
∴ (أ ب)^{٢} = أ جـ × أ ء

∴ $\overline{أب}$ تمس الدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء عند النقطة ب.

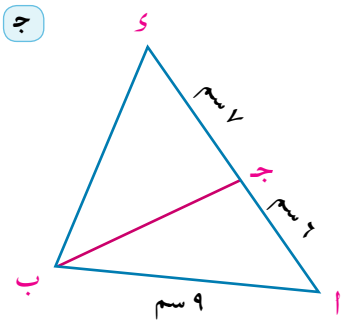
حاول أن تحل

(٥) فى أيٍّ من الأشكال الآتية يكون $\overline{أب}$ مماسًا للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء

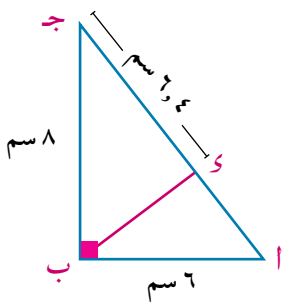
أ



ب

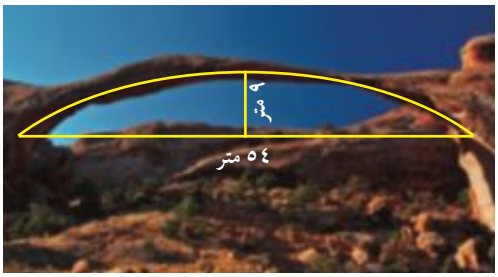


جـ



مثال

(٦) **تطبيقات حياتية: الربط مع الجيولوجيا:** فى إحدى المناطق الساحلية توجد طبقة أرضية على شكل قوس طبيعي. وجد الجيولوجيون أنه قوس دائرة كما فى الشكل المقابل. أوجد طول نصف قطر دائرة القوس.



الحل

بفرض أن طول نصف قطر دائرة القوس = ن م مترًا

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متقاطعان فى هـ

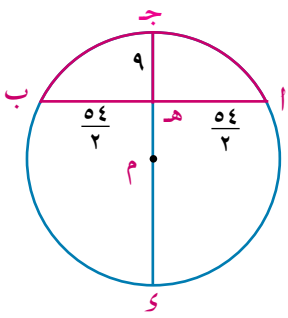
∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

٢٧ × ٢٧ = ٩ × (٢ن م − ٩)

٢ن م − ٩ = ٨١

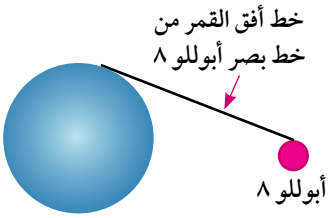
ن م = ٤٥

أي أن طول نصف قطر دائرة القوس يساوي ٤٥ مترًا.



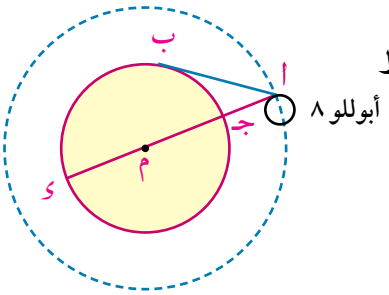
نشاط

الربط بالفضاء: مركبة الفضاء أبوللو ٨ هى أول مركبة فضائية حملت إنسانًا إلى مدار القمر.



إذا علمت أن خط البصر من أبوللو ٨ إلى أفق القمر يكون خطًّا مماسيًّا، وحلقت المركبة فى مدار دائرى بمتوسط ارتفاع ١٨٠ كم عن سطح القمر. احسب المسافة من المركبة إلى أفق القمر علمًا بأن طول نصف قطر القمر ١٧٤٠ كم تقريبًا.

الحل



يمكن نمذجة المسألة فى شكل دائرة مركزها م حيث تمثل $\overline{ا ب}$ خط البصر من أبوللو ٨ إلى أفق القمر فيكون:

ا ب هو المسافة من المركبة إلى أفق القمر.

ا جـ = ١٨٠ كم (متوسط ارتفاع المركبة عن سطح القمر)

جـ ء = ٢ × ١٧٤٠ = ٣٤٨٠ كم (طول قطر القمر)

ا ء = ٣٤٨٠ + ١٨٠ = ٣٦٦٠ كم

ويكون: (ا ب)^{٢} = ا جـ × ا ء (المماس وأجزاء القاطع)

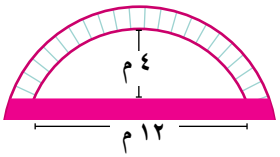
= ١٨٠ × ٣٦٦٠ = ٦٥٨٨٠٠

ا ب ≃ ٨١٢ كم

أي أن المسافة من المركبة إلى أفق القمر تساوى ٨١٢ كم تقريبًا.

حاول أن تحل

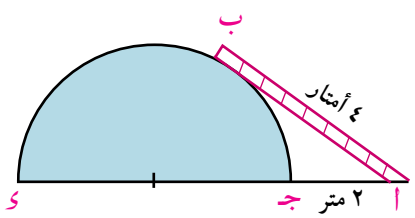
٦ **الربط مع هندسة الطرق:** يتم شق الأنفاق الدائرية لتسهيل حركة المركبات وتجنب اختناقات المرور:



ما طول نصف قطر دائرة النفق الموضح بالشكل المقابل إذا كان ارتفاع القوس فوق منتصف النفق يساوي ٤ أمتارًا.

تحقق من فهمك

الربط بالصناعة: يرتكز سلم طوله ٤ أمتار على أرضية أفقية خشنة، وبطرفه الآخر على خزان على هيئة نصف كرة، كما فى الشكل المقابل. إذا كان بعد نهاية السلم السفلى عن قاعدة الخزان ٢ متر، فأوجد طول نصف قطر كرة الخزان.

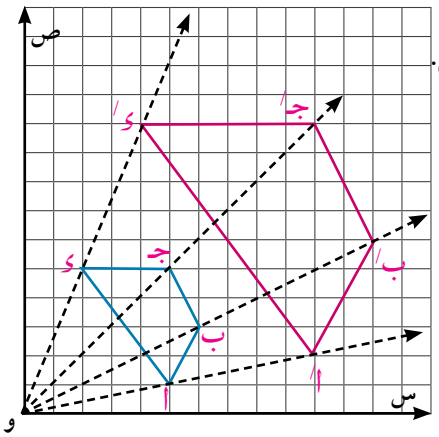


نشاط

مغير البعد Homothetic Transformation

قد تستخدم البرامج الرسومية للحاسب الآلى فتقوم بتكبير أو تصغير بعض الوثائق أو الصور بالحجم المطلوب لوضعها فى المكان المناسب.

يوضح الشكل المقابل أ ب جـ ء وصورته أ/ ب/ جـ/ ء/ بتحويل هندسي.



١- قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة:

∠أ ، ∠أ/ - ∠ب ، ∠ب/

∠جـ ، ∠جـ/ - ∠ء ، ∠ء/ ماذا تستنتج؟

٢- أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة

$\frac{أب}{أ/ب/}$ ، $\frac{ب جـ}{ب/جـ/}$ ، $\frac{جـ ء}{جـ/ء/}$ ، $\frac{ء أ}{ء/أ/}$ ماذا تلاحظ؟

٣- هل المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع أ/ ب/ جـ/ ء/؟

سبق وعلمت أن كلًّا من التحويلات الهندسية (الانعكاس - الانتقال - الدوران) هى تَسَاوى قياس، لأن الشكل وصورته متطابقان، فيكون للزوايا المتناظرة نفس القياسات وللأضلاع المتناظرة نفس الأطوال.

الشكل السابق يوضح تحويلًا هندسيًّا آخر، فيكون للزوايا المتناظرة نفس القياس، كما أن أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة ويعرف بمغير البعد.

تعريف

مغير البعد

لتكن (و) نقطة ثابتة فى المستوى، ك ∈ ح*

مغير البعد (و، ك): مركزه (و) ومعامله (ك)، هو تحويل هندسي يحول كل نقطة أ فى المستوى إلى نقطة آخرى أ/ فى نفس المستوى، حيث

$$و\,أ/ = |ك| \times و\,أ$$

تذكر

|ك| = ك ، ك > ٠

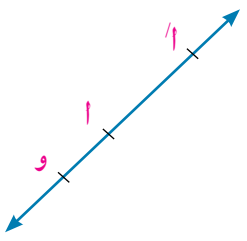
|ك| = - ك ، ك < ٠

ونرمز له بالرمز $م_{(و، ك)}(أ) = (أ/)$ ويقرأ: أ/ صورة النقطة أ بمغير بعد مركزه نقطة و، ومعامله ك.

ملاحظة هامة

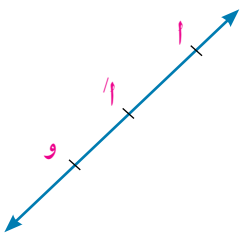
① بفرض أن النقطتين و، أ فى المستوى ورسمنا $\overleftrightarrow{و\,أ}$ فإن:

ك < ١



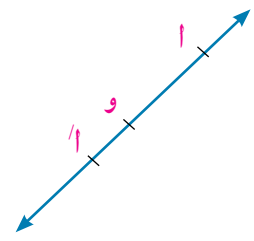
أ/ ∈ $\overleftrightarrow{و\,أ}$ ، أ/ ∉ $\overline{و\,أ}$

٠ < ك < ١



أ/ ∈ $\overline{و\,أ}$

ك > ٠

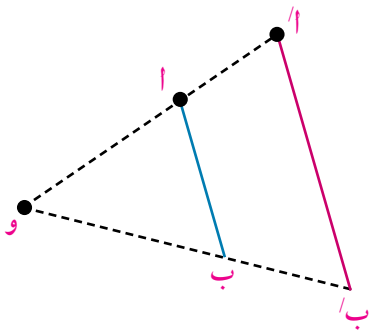


أ/ ∈ $\overleftarrow{و\,أ}$ ، أ/ ∉ $\overline{و\,أ}$

فكر

➢ إذا كان: $م_{(و، ك)}(أ) = (أ')$، حدِّد مَوضِعَ النقطة أ' ➢ إذا كان: $م_{(و، ك)}(ب) = (ب')$ حدِّد مَوضِعَ النقطة ب'

② إذا كان $م_{(و، ك)}(أ) = (أ')$، $م_{(و، ك)}(ب) = (ب')$



فإن: $\overline{أ'ب'}$ صورة $\overline{أب}$ **ويكون:** فى $\triangle$ و أ' ب' ، $\triangle$ و أ ب

$\frac{و أ'}{و أ} = \frac{و ب'}{و ب} = ك$ ، $\angle$ ب مشتركة

$\therefore \triangle$ و أ' ب' $= \triangle$ و أ ب

ومن ذلك نستنتج أن:

أولًا: $\frac{أ'ب'}{أب} = \frac{و أ'}{و أ} = \frac{و ب'}{و ب} = ك$ **ثانيًا:** $\overline{أ'ب'} // \overline{أب}$

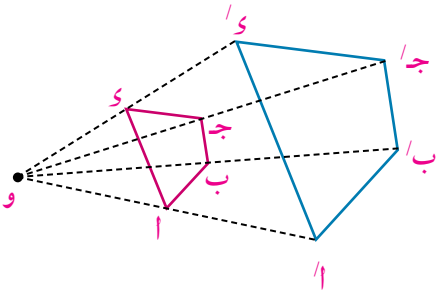
③ مُغيِّر البعد يُحافظ على:

أ النسب بين الأبعاد. ب الاستقامة والبينية. جـ قياس الزوايا. د التوازي.

لاحظ أن: |معامل مغير البعد ك| = $\frac{\text{الطول فى الصورة}}{\text{الطول فى الأصل}}$

تُبين الأشكال الآتية متى يكون مُغيِّر البعد تكبيرًا أو تصغيرًا بمغيِّر بُعد مركزه النقطة و؟

أ $\frac{أ'ب'}{أب} = ك = ٢$

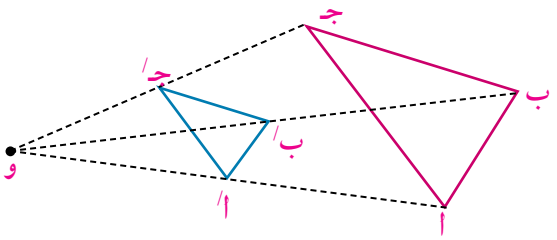


الشكل أ' ب' جـ' د' هو تكبير للشكل أ ب جـ د بمعامل ك = ٢ ويكون:

أ' ب' = ٢ أ ب ، ب' جـ' = ٢ ب جـ

جـ' د' = ٢ جـ د ، د' أ' = ٢ د أ

ب $\frac{أ'ب'}{أب} = ك = \frac{١}{٢}$



المثلث أ' ب' جـ' هو تصغير للمثلث أ ب جـ بمعامل ك = $\frac{١}{٢}$ ويكون:

أ' ب' = $\frac{١}{٢}$ أ ب ، ب' جـ' = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

جـ' أ' = $\frac{١}{٢}$ جـ أ

ج) فى الشكل المقابل ك = $-\frac{1}{2}$ < ٠

فيكون أ/ ∈ $\overleftarrow{أو}$ ، أ/ ≠ أ و،

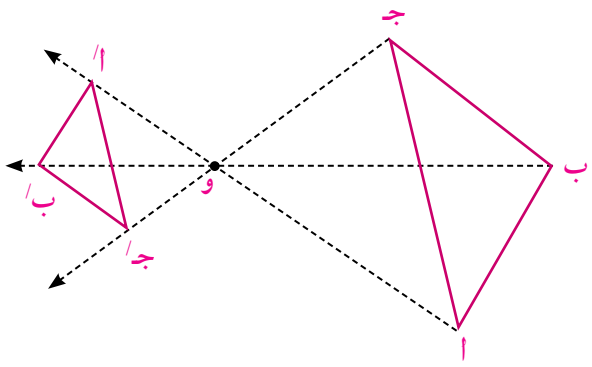
ب/ ∈ $\overleftarrow{ب و}$ ، ب/ ≠ ب و

جـ/ ∈ $\overleftarrow{جـ و}$ ، جـ/ ≠ جـ و

حيث أ/ ب/ = |$-\frac{1}{2}$| أ ب = $\frac{1}{2}$ أ ب

ب/ جـ/ = |$-\frac{1}{2}$| ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

جـ/ أ/ = |$-\frac{1}{2}$| جـ أ = $\frac{1}{2}$ جـ أ



اكتشف

١) من شبكة المثلثات المتطابقة بالشكل المقابل اكتشف مركز ومعامل مُغيِّر البعد الذى يجعل:

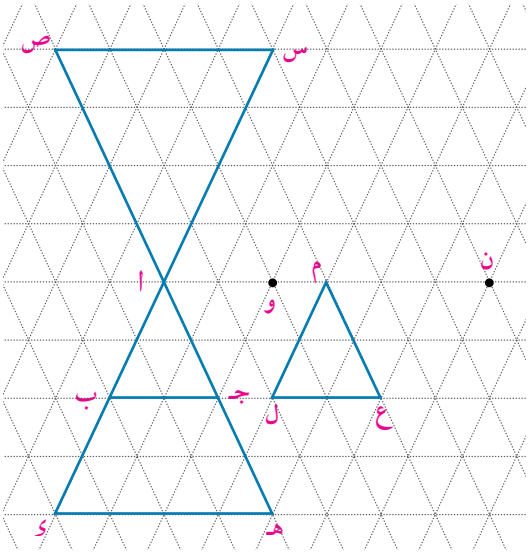
أ) △ أ ب جـ صورة △ أ ء هـ

ب) △ م ع ل صورة △ أ هـ ء

ج) △ أ س ص صورة △ أ ب جـ

د) △ م ع ل صورة △ أ ص س

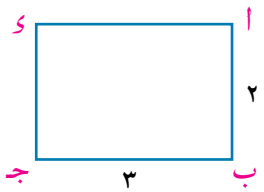
هـ) △ أ هـ ء صورة △ أ ص س



٢) أ ب جـ ء مستطيل بعداه ٢، ٣ من وحدات الطول.

أ) أوجد بعدى أ/ ب/ جـ/ ء/ صورة المستطيل أ ب جـ ء بمغيِّر بُعد معامله ك.

ب) احسب النسبة $\frac{\text{مـ (المستطيل أ/ ب/ جـ/ ء/)}}{\text{مـ (المستطيل أ ب جـ ء)}}$ ماذا تلاحظ؟



لعلك لاحظت أن : مساحة صورة الشكل بمغير بعد معامله ك = ك^{٢} × مساحة الشكل الأصلى.

فإذا كانت مساحة سطح مضلع ٢٤٥سم^{٢}. فأوجد معامل مغيِّر البعد الذى يَجعل مساحة صورة المضلع:

أ) ٩٨٠سم^{٢} ب) ٥سم^{٢} ج) ١٨٠سم^{٢}

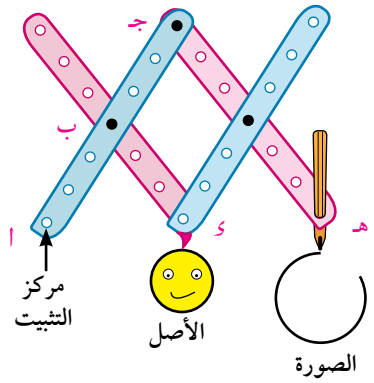
اصنع بنفسك أداة التمدد Pantograph

الأدوات: ٤ مساطر مدرجة - مثقاب - مسامير محواة - قلم - سن مدبب.

الخطوات: ١- اثقب المساطر عند تدريجها وثبِّت المسامير المحواة والسن المدبب والقلم كما فى الشكل.

٢- اجعل $\frac{\text{اجـ}}{\text{أ ب}}$ = ك

٣- حرك الطرف ء على الأصل فيرسم لك الطرف هـ صورته بمغيِّر بُعد معامله ك.



ملخص الوحدة

المضلعان المتشابهان **Two Similar Polygons**

يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

نسبة التشابه (معامل التشابه) **Similarity Ratio**

إذا كان المضلع أ′ ب′ جـ′ ء′ ~ المضلع أ ب جـ ء يكون ك معامل تشابه المضلع أ′ ب′ جـ′ ء′ للمضلع أ ب جـ ء

حيث $\frac{\text{أ′ ب′}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب′ جـ′}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{جـ′ ء′}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{أ′ ء′}}{\text{أ ء}} = \text{ك}$ ، ك ≠ ٠

النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تساوى معامل تشابهما

المستطيل الذهبى **Golden Rectangle**

مستطيل يمكن تقسيمه إلى مربع ومستطيل آخر مشابه له بشرط أن يكون طوله أصغر من ضعفى عرضه.

النسبة الذهبية **Golden Ratio**

النسبة بين طول المستطيل الذهبى إلى عرضه وتساوى تقريبًا ١,٦١٨ : ١

مسلمة: قضية أو عبارة رياضية يسلم بصحتها دون برهان و يستنتج منها حقائق تتعلق بالنظام، مثل:
«إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظائرها فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين».

نتيجة (١): إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث و يقطع الضلعين الآخرين أو المستقمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.

نتيجة (٢): إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.

نظرية ١: إذا تناسبت الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان.

نظرية ٢: إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين.

العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين **The relation between the area of two similar polygons**

نظرية ٣: النسبة بين مساحتى سطحين مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

حقيقة: المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

نظرية ٤: النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.



الوحدة ٣
الهندسة

نظريات التناسب فى المثلث

The Triangle Proportionality Theorems

معبد حتشبسوت بالأقصر

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة) وعكسها، ونتائج عليها.
- يتعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة التى تنص على: (إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.) وحالات خاصة منها.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على: (إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين) وحالات خاصة منها.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة (القواطع والمماسات).
- يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى دائرة.
- يحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى.

المصطلحات الأساسية

- نسبة Ratio
- تناسب Proportion
- يوازي Parallel
- نقطة تنصيف Midpoint
- متوسط Median
- قاطع Transversal
- منصف Bisector
- منصف داخلى Interior Bisector
- منصف خارجى Exterior Bisector
- عمودى على Perpendicular



كوبرى السلام (قناة السويس)

دروس الوحدة

الدرس (٣ – ١): المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.

الدرس (٣ – ٢): منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.

الدرس (٣ – ٣): تطبيقات التناسب فى الدائرة.

الأدوات المستخدمة

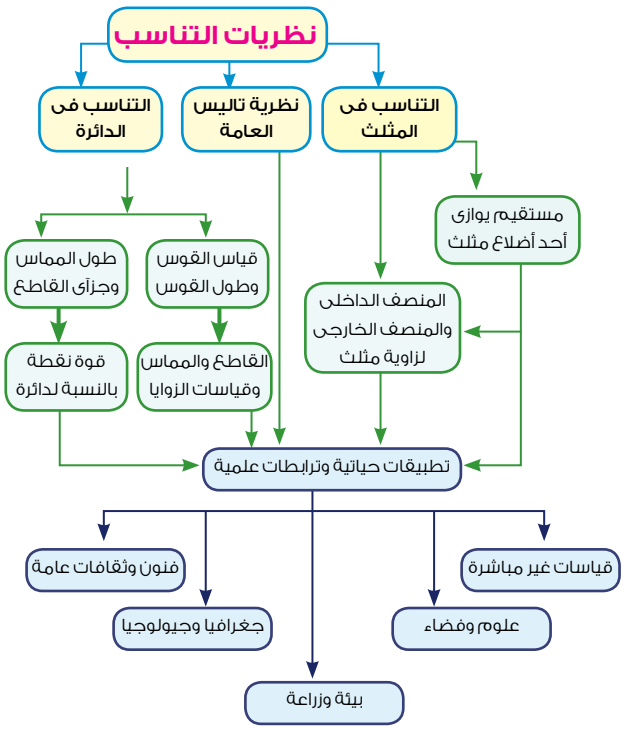
أدوات هندسية للرسم والقياس - حاسب آلى - برامج رسومية - جهاز عرض بيانات - ورق مربعات - خيوط - مقص

نبذه تاريخية

الرياضيات نشاط فكرى ممتع يجعل الذهن متفتحًا، والعقل صحوًا، وتُسهم فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والعلمية والحياتية ، من خلال تمثيلها أو نمذجتها بعلاقات بلغة الرياضيات ورموزها؛ ليتم حلها، ثم إعادتها إلى أصولها المادية.

فطن قدماء المصريين لذلك فأقاموا المعابد والأهرامات وفق خطوط مستقيمة بعضها متوازى والآخر قاطع لها، كما حرثوا الأراضى الزراعية فى خطوط مستقيمة متوازية، وقد أخذ الإغريق الهندسة عن المصريين القدماء فوضع إقليدس (٣٠٠ ق.م) نظاما هندسيًّا متكاملًا عرف بالهندسة الإقليدية وتقوم على مسلمات خمس، أهمها: مسلمة التوازى وهى:"من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازى مستقيمًا معلومًا". وتُعْني الهندسة الإقليدية بالأشكال المستوية (المثلثات – المضلعات – الدوائر) والأشكال ثلاثية الأبعاد، كما أن لها تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازى المستقيمات و المستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقى والطول فى الرسم (مقياس الرسم).

مخطط تنظيمي للوحدة



١ - ٣ المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

Parallel Lines and Proportional Parts

سوف تتعلم

- خصائص المستقيم الموازى لأى ضلع من أضلاع مثلث.
- استخدام التناسب فى حساب أطوال وبرهنة علاقات لقطع مستقيمة ناتجة عن قواطع لمستقيمات متوازية.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن المستقيمات المتوازية وقواطعها.

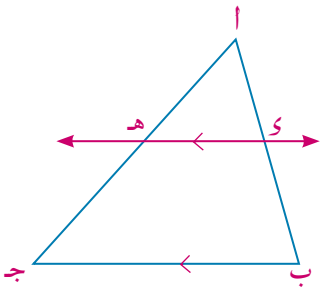
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- يوازى Parallel
- منتصف Midpoint
- متوسط Median
- قاطع Transversal

الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم والقياس.
- حاسب آلى.
- برامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.

فكر و ناقش



١- ارسم المثلث أ ب جـ، عين نقطة ى ∈ $\overline{أب}$ ثم ارسم $\overleftrightarrow{ى هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overline{أجـ}$ فى هـ.

٢- أوجد بالقياس طول كل من:
$\overline{أى}$ ، $\overline{ى ب}$، $\overline{أهـ}$ ، $\overline{هـ جـ}$

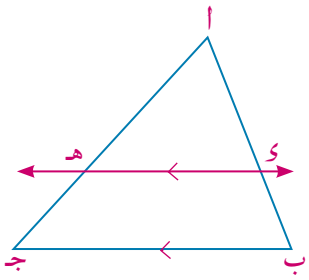
٣- احسب النسبتين $\frac{أى}{ى ب}$، $\frac{أهـ}{هـ جـ}$ وقارن بينهما. ماذا تلاحظ؟

إذا تغير موقع $\overleftrightarrow{ى هـ}$ محافظًا على توازيه مع $\overline{ب جـ}$.

هل تتغير العلاقة بين $\frac{أى}{ى ب}$، $\frac{أهـ}{هـ جـ}$؟ ماذا نستنتج؟

نظرية ١

إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.



المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{ى هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

المطلوب: $\frac{أى}{ى ب} = \frac{أهـ}{هـ جـ}$

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{ى هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ △أ ب جـ ~ △أ ى هـ (مسلمة التشابه)

ويكون: $\frac{أب}{أى} = \frac{أجـ}{أهـ}$ (١)

∵ ى ∈ $\overline{أب}$ ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$

∴ أ ب = أ ى + ى ب ، أ جـ = أ هـ + هـ جـ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$\frac{أى + ى ب}{أى} = \frac{أهـ + هـ جـ}{أهـ}$

ويكون: $\frac{أى}{أى} + \frac{ى ب}{أى} = \frac{أهـ}{أهـ} + \frac{هـ جـ}{أهـ}$

$١ + \frac{ى ب}{أى} = ١ + \frac{هـ جـ}{أهـ}$

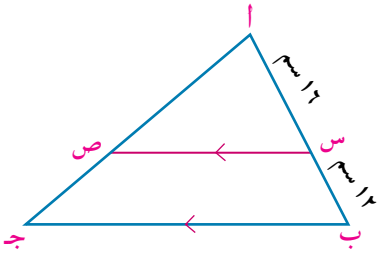
∴ $\frac{ى ب}{أى} = \frac{هـ جـ}{أهـ}$

ومن خواص التناسب نجد أن: $\frac{أى}{ى ب} = \frac{أهـ}{هـ جـ}$ (وهو المطلوب)

لاحظ أن: $\because \frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$ $\therefore \frac{أ ء + ء ب}{ء ب} = \frac{أ هـ + هـ جـ}{هـ جـ}$

أي أن: $\frac{أ ب}{ء ب} = \frac{أ جـ}{هـ جـ}$

مثال



(١) في الشكل المقابل: $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$، أ س = ١٦سم، ب س = ١٢سم.

أ إذا كان أ ص = ٢٤سم، أوجد ص جـ.

ب إذا كان جـ ص = ٢١سم، أوجد أ جـ.

الحل

أ $\because \overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ $\therefore \frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ص}{ص جـ}$

ويكون: $\frac{١٦}{١٢} = \frac{٢٤}{ص جـ}$ $\therefore$ ص جـ $= \frac{١٢ \times ٢٤}{١٦} = ١٨$سم.

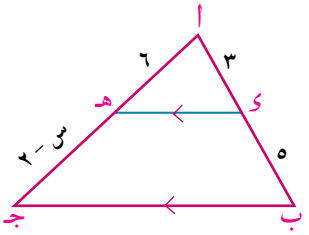
ب $\because \overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ $\therefore \frac{أ ب}{ب س} = \frac{أ جـ}{جـ ص}$

ويكون: $\frac{١٦ + ١٢}{١٢} = \frac{أ جـ}{٢١}$ $\therefore$ أ جـ $= \frac{٢٨ \times ٢١}{١٢} = ٤٩$سم.

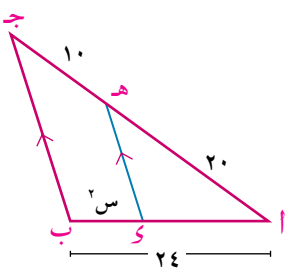
حاول أن تحل

(١) في كل من الأشكال التالية: $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$. أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

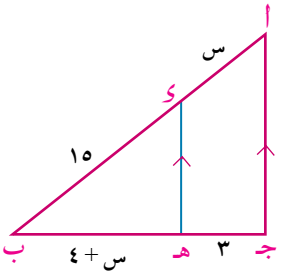
أ



ب



جـ

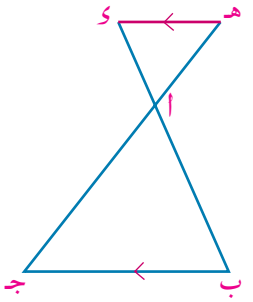


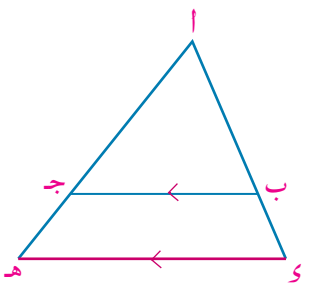
نتيجة

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازي ضلعًا من أضلاع المثلث، وليكن $\overline{ب جـ}$، ويقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ في ء، هـ على الترتيب فإن: $\frac{أ ب}{ب ء} = \frac{أ جـ}{جـ هـ}$ (كما في الشكل).

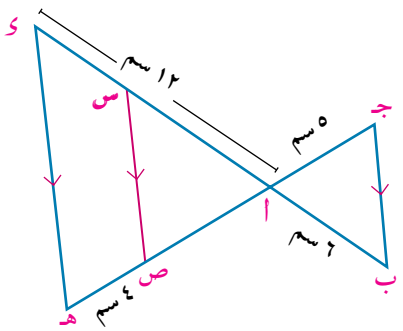
بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن:

$\frac{أ ء}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ جـ}$ ، $\frac{أ ء}{ب ء} = \frac{أ هـ}{جـ هـ}$





مثال



(٢) فى الشكل المقابل: $\overline{جـ هـ} \cap \overline{ب ء} = \{ا\}$، س $\in \overline{ا ء}$

ص $\in \overline{ا هـ}$ حيث $\overline{س ص} // \overline{ب جـ} // \overline{هـ ء}$.

فإذا كان ا ب = ٦سم، ا جـ = ٥سم، ا ء = ١٢سم، هـ ص = ٤سم.

أوجد طول كل من $\overline{ا هـ}$، $\overline{ء س}$.

الحل

∵ $\overline{هـ ء} // \overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ هـ} \cap \overline{ب ء} = \{ا\}$

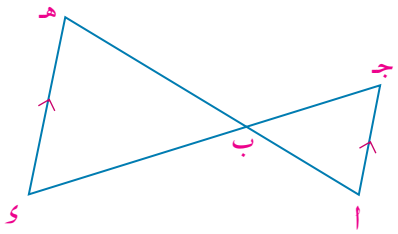
∴ $\frac{ا ء}{ا ب} = \frac{ا هـ}{ا جـ}$ ويكون: $\frac{١٢}{٦} = \frac{ا هـ}{٥}$ ∴ ا هـ = ١٠سم

فى Δ ا هـ ء:

∵ $\overline{س ص} // \overline{هـ ء}$ ∴ $\frac{ا هـ}{هـ ص} = \frac{ا ء}{ء س}$

ويكون $\frac{١٠}{٤} = \frac{١٢}{ء س}$ ∴ ء س = ٤,٨سم

حاول أن تحل



(٢) فى الشكل المقابل: $\overline{ء هـ} // \overline{ا جـ}$ ، $\overline{ا هـ} \cap \overline{جـ ء} = \{ب\}$

أ إذا كان: ا ب = ٨سم، ب جـ = ٩سم، ب هـ = ١٢سم.

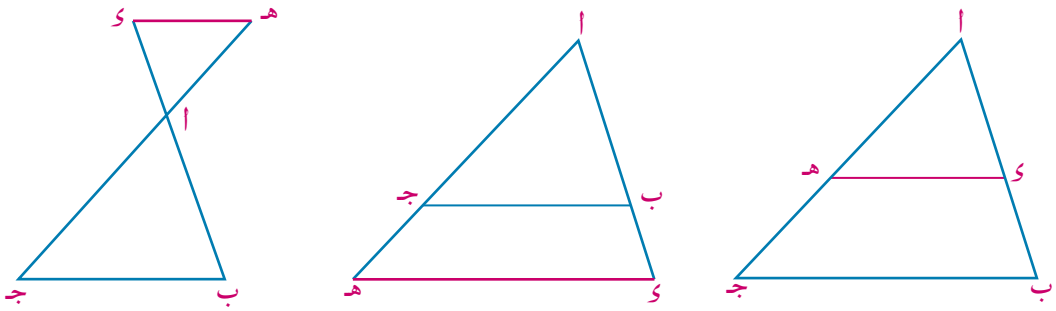
أوجد طول $\overline{ب ء}$.

ب إذا كان: ا ب = ٦سم، ب هـ = ٩سم، جـ ء = ١٨سم.

أوجد طول $\overline{ب جـ}$.

عكس نظرية ١

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.



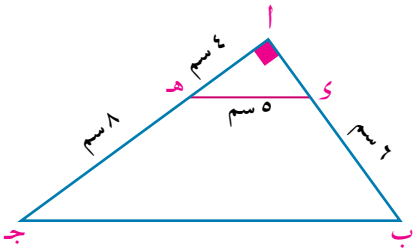
فى الأشكال الثلاثة السابقة: ا ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{ء هـ}$ يقطع $\overleftrightarrow{ا ب}$ فى ء، $\overleftrightarrow{ا جـ}$ فى هـ. وكان $\frac{ا ء}{ء ب} = \frac{ا هـ}{هـ جـ}$

فإن $\overleftrightarrow{ء هـ} // \overleftrightarrow{ب جـ}$

تفكير منطقى: هل Δ ا ء هـ ~ Δ ا ب جـ؟ ولماذا؟ - هل $\angle$ ا ء هـ ≡ $\angle$ ب ؟ فسر إجابتك.

اكتب برهانًا لعكس النظرية.

مثال



(٣) **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ

(أ) أثبت أن: ء هـ // ب جـ. (ب) أوجد طول ب جـ.

الحل

(أ) ∵ المثلث أ ء هـ قائم الزاوية فى أ

∴ أ ء = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = ٣سم (نظرية فيثاغورث)

∵ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ويكون ء هـ // ب جـ.

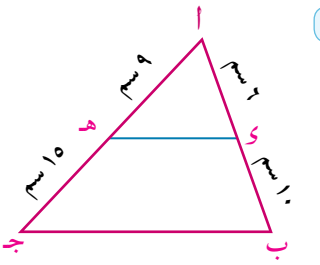
(ب) ∵ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب جـ (لماذا) ∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٣}$

ويكون $\frac{٥}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٣}$ ∴ ب جـ = ١٥سم

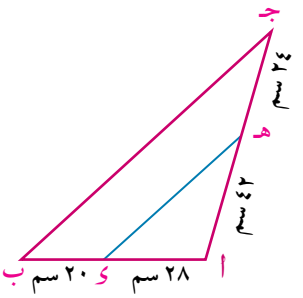
حاول أن تحل

(٣) فى كل من الأشكال التالية حدد ما إذا كان ء هـ // ب جـ أم لا.

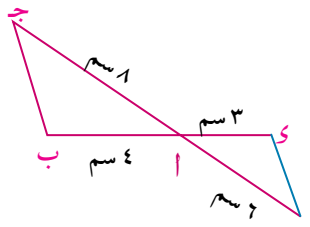
(أ)



(ب)



(ج)

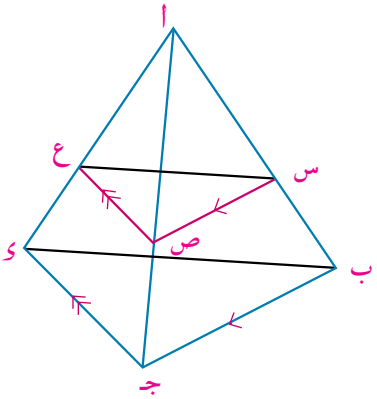


مثال

(٤) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه س ∈ أ ب ، ص ∈ أ جـ حيث س ص // ب جـ،

رسم ص ع // جـ ء ويقطع أ ء فى ع. أثبت أن س ع // ب ء .

الحل



فى Δ أ ب جـ:

∵ س ص // ب جـ ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص جـ}}$ (١)

فى Δ أ ء جـ:

∵ ص ع // جـ ء ∴ $\frac{\text{أ ع}}{\text{ع ء}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص جـ}}$ (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن: $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{ع ء}}$

فى Δ أ ب ء:

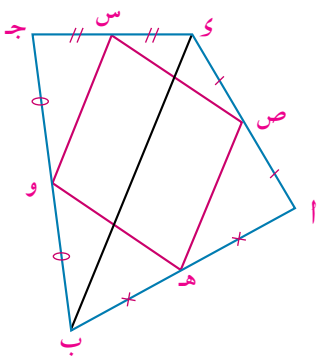
∵ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{ع ء}}$ ∴ س ع // ب ء

حاول أن تحل

٤ أ ب جـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى م. رسم $\overleftarrow{م هـ}$ // $\overline{أء}$ ويقطع $\overline{أب}$ فى هـ، رسم $\overleftarrow{م و}$ // $\overline{جـء}$ ويقطع $\overline{ب جـ}$ فى و. أثبت أن: $\overline{هـ و}$ // $\overline{أ جـ}$

تفكير منطقى: إذا كان هـ، و، س، ص منتصفات الأضلاع $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـء}$ ، $\overline{ء أ}$ فى الشكل الرباعى أ ب جـ ء.

هل الشكل هـ و س ص متوازى أضلاع؟



افهم: ما المطلوب ؟ متى يكون الشكل متوازى أضلاع؟

خطط: كون مثلثات برسم $\overline{ب ء}$ التي تقسم الشكل إلى مثلثين.

△أ ب ء
- هـ منتصف $\overline{أب}$
- ص منتصف $\overline{أء}$
- $\overline{هـ ص}$ // $\overline{ب ء}$
- هـ ص = $\frac{1}{2}$ ب ء

△جـ ب ء
- و منتصف $\overline{ب جـ}$
- س منتصف $\overline{جـء}$
- $\overline{و س}$ // $\overline{ب ء}$
- و س = $\frac{1}{2}$ ب ء

$\overline{هـ ص}$ // $\overline{و س}$ ، هـ ص = وس ← الشكل هـ و س ص متوازى أضلاع

حل: اكتب العبارات الرياضية المناسبة للبرهان ومبرراتها.

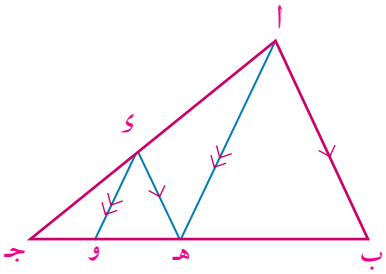
تحقق: ابحث هل $\overline{هـ و}$ // $\overline{س ص}$ ؟ فسِّر إجابتك.

حاول أن تحل

٥ **فى الشكل المقابل:** أ ب جـ مثلث، ء ∈ $\overline{أ جـ}$،

$\overline{ء هـ}$ // $\overline{أب}$ ، $\overline{ء و}$ // $\overline{أهـ}$

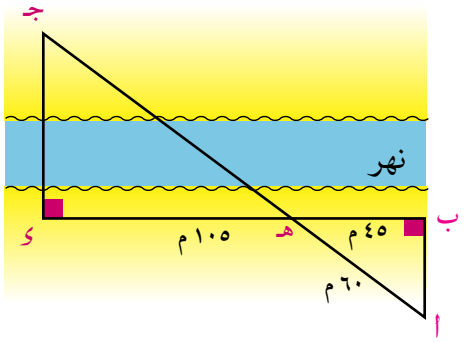
ارسم مخططًا يوضح كيفية إثبات أن (جـ هـ)^{٢} = جـ و × جـ ب.



مثال

٥ **تحديد المواقع:** لتحديد الموقع جـ، قام المساحون بالقياس وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع جـ عن الموقع أ



الحل

$\overline{أب} \perp \overline{ب ء}$ ، $\overline{جـء} \perp \overline{ب ء}$ ∴ $\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$

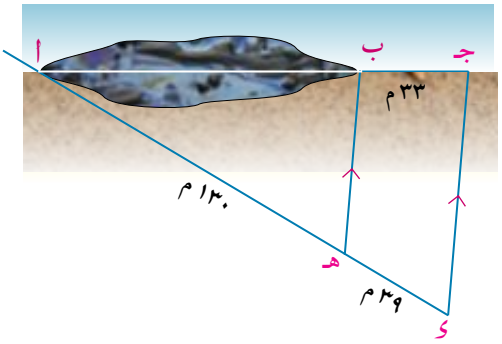
∵ $\overline{أ جـ} \cap \overline{ب ء} = \{هـ\}$ ، $\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$

∴ $\frac{هـ أ}{أ جـ} = \frac{هـ ب}{ب ء}$ ويكون $\frac{٦٠}{أ جـ} = \frac{٤٥}{١٠٥ + ٤٥}$

∴ أ جـ = $\frac{١٥٠ \times ٦٠}{٤٥}$ = ٢٠٠ متر.

حاول أن تحل

٦ **مكافحة التلوث:** قام فريق مكافحة التلوث بتحديد موقع بقعة زيت على أحد الشواطئ كما فى الشكل المقابل. احسب طول بقعة الزيت.



فكر و ناقش

لعلك لاحظت إمكانية استخدام توازى مستقيم لأحد أضلاع مثلث فى تطبيقات حياتية كثيرة.

يوضح الشكل المقابل بوابة أحد المشاتل الزراعية، وهى مكونه من قطع خشبية متوازية وأخرى قاطعة لها.

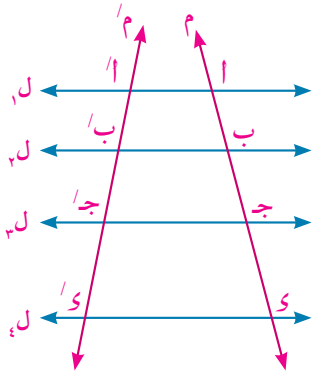
هل توجد علاقة بين أطوال أجزاء قواطع هذه القطع المتوازية؟



نمذجة

لبحث وجود علاقة أم لا. نمذج المشكلة (ضع نموذجًا رياضيًّا للمشكلة) كما يلى:

١- ارسم المستقيمات ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤، م، م/ قاطعان لها فى أ، ب، جـ، ء ، أ/، ب/، جـ/، ء/ على الترتيب كما بالشكل المقابل.



٢- قس أطوال القطع المستقيمة وقارن النسب التالية:

$\frac{أب}{أ/ب/}$ ، $\frac{ب جـ}{ب/جـ/}$ ، $\frac{جـ ء}{جـ/ء/}$ ، $\frac{أ جـ}{أ/جـ/}$ ،

ماذا نستنتج؟

نظرية تاليس العامة

Talis' Theorem

نظرية ٢

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

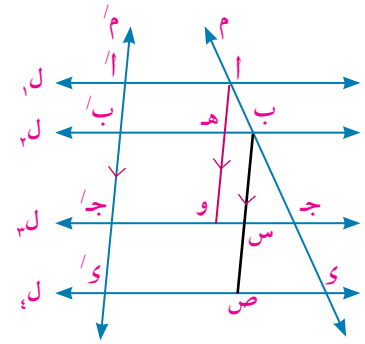
المعطيات: ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م، م/ قاطعان لها

المطلوب : أ ب : ب جـ : جـ ء = أ/ ب/ : ب/ جـ/ : جـ/ ء/

البرهان : ارسم $\overleftarrow{أو}$ // م/ ، ويقطع ل٢ فى هـ ، ل٣ فى و، $\overleftarrow{ب ص}$ // م/، ويقطع ل٢ فى س، ل٤ فى ص.

∵ $\overline{أ/أ}$ // $\overline{هـ ب/}$ ، $\overline{أهـ}$ // $\overline{أ/ب/}$

∴ أ هـ ب/ أ/ متوازى أضلاع ويكون: أ هـ = أ/ ب/



بالمثل: هـ و = ب / جـ / ، ب س = ب / جـ / ، س ص = جـ / ء /

فى Δ أ جـ و:

∵ $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{جـ و}}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ و}}$

ويكون: $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ / ب /}}{\text{ب / جـ /}}$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ / ب /}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب / جـ /}}$ (إبدال الوسطين) (١)

بالمثل Δ ب ء ص:

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{ب / جـ /}}{\text{جـ / ء /}}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب / جـ /}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{جـ / ء /}}$ (إبدال الوسطين) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ / ب /}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب / جـ /}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{جـ / ء /}}$

∴ أ ب : ب جـ : جـ ء = أ / ب / : ب / جـ / : جـ / ء / وهو المطلوب.

حاول أن تحل

(٧) اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل السابق:

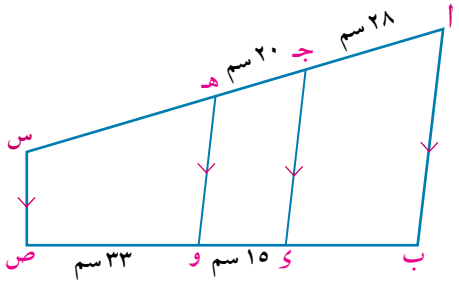
أ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ء}}$ ب $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}}$ جـ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء أ}}$ د $\frac{\text{أ / ء /}}{\text{أ / ب /}}$ هـ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ / ب /}}$

مثال

(٦) فى الشكل المقابل: $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ ،

أ جـ = ٢٨سم، جـ هـ = ٢٠سم، ء و = ١٥سم، و ص = ٣٣سم.

أوجد طول كل من: $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{هـ س}}$



الحل

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

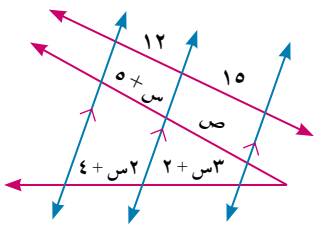
∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ء و}} = \frac{\text{هـ س}}{\text{و ص}}$

$\frac{٢٨}{\text{ب ء}} = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{\text{هـ س}}{٣٣}$ ∴ ب ء = ٢١سم ، هـ س = ٤٤سم.

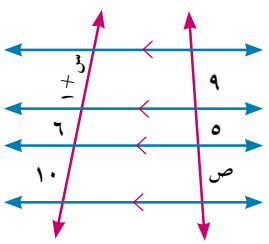
حاول أن تحل

(٨) فى كل من الأشكال التالية، المستقيمات الحمراء تقطع مستقيمات متوازية. احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

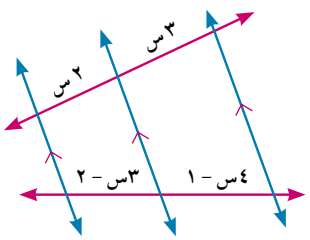
أ



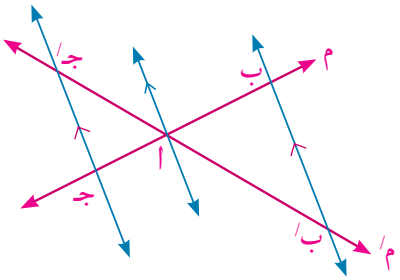
ب



جـ



حالات خاصة



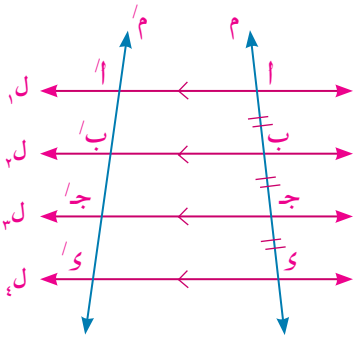
١- إذا تقاطع المستقيمان م ، م/ فى النقطة أ

وكان: $\overleftrightarrow{ب ب/} // \overleftrightarrow{جـ جـ/}$، فإن: $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{أ ب/}{أ جـ/}$

وبالعكس: إذا كان: $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{أ ب/}{أ جـ/}$

فإن: $\overleftrightarrow{ب ب/} // \overleftrightarrow{جـ جـ/}$

نظرية تاليس الخاصة



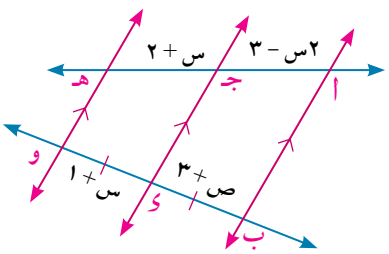
٢- إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك.

فى الشكل المقابل ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤، قطعها المستقيمان م، م/

وكان: أ ب = ب جـ = جـ ء فإن: أ/ ب/ = ب/ جـ/ = جـ/ ء/

مثال

(٧) **فى الشكل المقابل** أوجد القيمة العددية لكل من س، ص.



الحل

∵ $\overline{أ ب} // \overline{جـ ء}$ ، $\overline{هـ و}$ ، ب ء = ء و

∴ أ جـ = جـ هـ

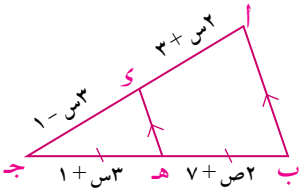
ويكون: ٢س - ٣ = س + ٢ ∴ س = ٥

∵ ب ء = ء و ، س = ٥ ∴ ص + ٣ = ٥ + ١ ∴ ص = ٣

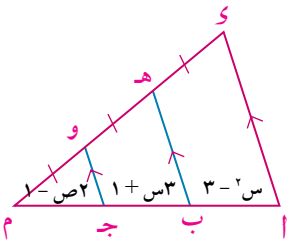
حاول أن تحل

(٩) فى كل مما يأتى أوجد قيمة س، ص العددية. (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

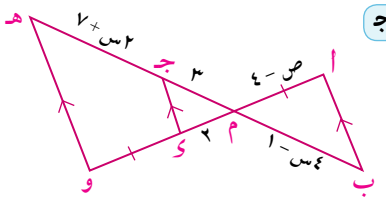
أ



ب



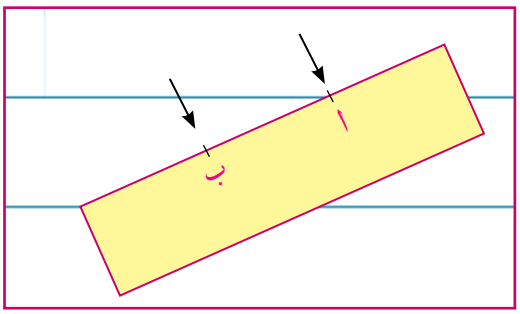
جـ



فكر

أراد يوسف تقسيم شريط من الورق إلى ٣ أجزاء متساوية فى الطول، فقام بوضعها على صفحة كراسته كما بالشكل المقابل وحدد نقطتى التقسيم أ، ب.

هل تقسيم يوسف للشريط صحيحًا؟ فسر إجابتك.



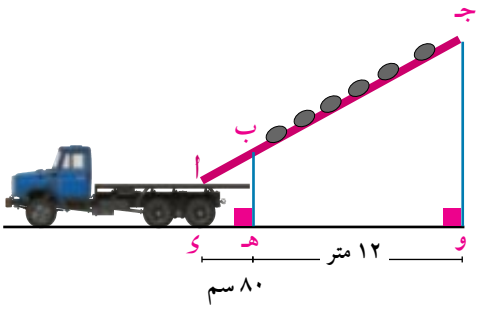
استخدم أدواتك الهندسية لتتحقق من صحة إجابتك.

مثال

٨ الربط بالصناعة: تنقل عبوات الأسمدة من إنتاج أحد المصانع بانزلاقها عبر أنبوب مائل لتحملها السيارات إلى مراكز التوزيع كما فى الشكل المقابل.

فإذا كانت ى، هـ، و مساقط النقط أ، ب، جـ على الأفقى بنفس الترتيب، أ ب = ١,٢م، ى هـ = ٨٠سم، هـ و = ١٢مترًا

أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.



الحل

∵ ى، هـ، و مساقط النقط أ، ب، جـ على الأفقى

∵ $\overline{أى}$ // $\overline{ب هـ}$ // $\overline{جـ و}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{ى و}$ قاطعان لها

∴ $\overline{أى}$ // $\overline{ب هـ}$ // $\overline{جـ و}$

∴ $\frac{أجـ}{أب} = \frac{ى و}{ى هـ}$

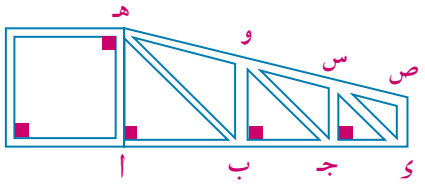
ويكون: $\frac{أجـ}{١,٢} = \frac{٠,٨ + ١٢}{٠,٨}$

∴ أجـ = $\frac{١٢,٨ \times ١,٢}{٠,٨}$ = ١٩,٢ مترًا

∴ أجـ ≃ ١٩ مترًا

حاول أن تحل

١٠ أ الربط بالإنشاءات:

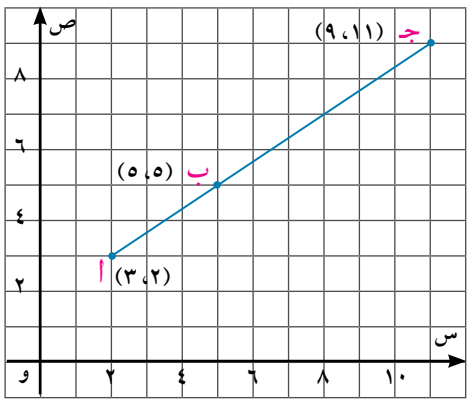


إذا كان أ ب = ١٨٠سم، هـ و = ٢متر

أ ب : ب جـ : جـ ى = ٥ : ٤ : ٣

أوجد طول كل من $\overline{هـ ص}$، $\overline{جـ ى}$

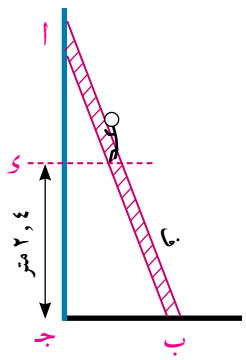
ب تفكير ناقد



أوجد من الشكل $\frac{أب}{ب جـ}$ بعدة طرق مختلفة، كلما أمكنك ذلك. هل حصلت على نفس الناتج؟

تحقق من فهمك

حل مشكلات: أ ب سلم طوله ٤,١ أمتار يستند بطرفه العلوى أ على حائط رأسى وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة. إذا كان بعد الطرف السفلى عن الحائط ٩٠سم. فاحسب المسافة التى يصعدها رجل على السلم ليصبح على ارتفاع ٢,٤متر من الأرض.



٢ - ٣

منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

Angle Bisectors and Proportional Parts

سوف تتعلم

- خصائص منصفات زوايا المثلث.
- استخدام التناسب فى حساب أطوال القطع المستقيمة الناتجة عن تنصيف زاوية فى مثلث.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن منصفات زوايا المثلث.

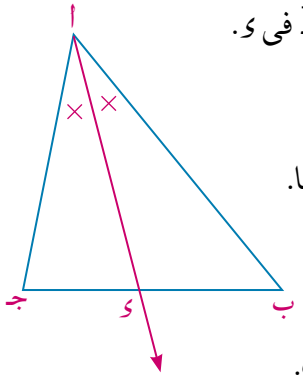
عمل تعاونى

١- ارسم المثلث أ ب جـ، و إرسم $\overleftrightarrow{أ ء}$ ليقطع $\overline{ب جـ}$ فى ء.

٢- قس كلًّا من $\overline{ب ء}$، $\overline{جـ ء}$، $\overline{أ ب}$، $\overline{أ جـ}$.

٣- احسب كل من النسبتين $\frac{ب ء}{ء جـ}$، $\frac{ب أ}{أ جـ}$ وقارن بينهما.
ماذا تستنتج؟

٤- كرر العمل السابق عدة مرات.
هل يتحقق استنتاجك؟ عبر عن استنتاجك بلغتك.



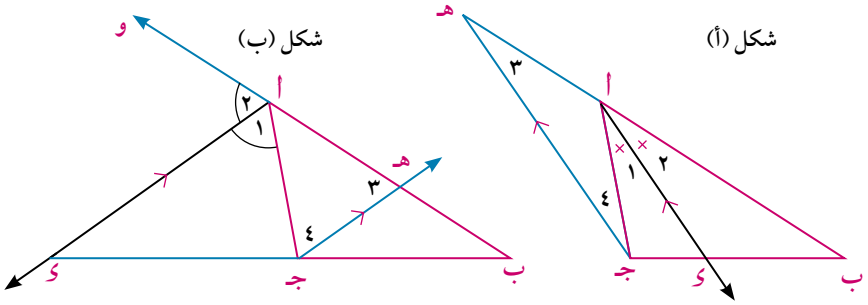
منصف زاوية مثلث Bisector of an Angle of a Triangle

نظرية ٣

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزآين النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- منصف Bisector
- منصف داخلى Interior Bisector
- منصف خارجى Exterior Bisector
- عمودى Perpendicular



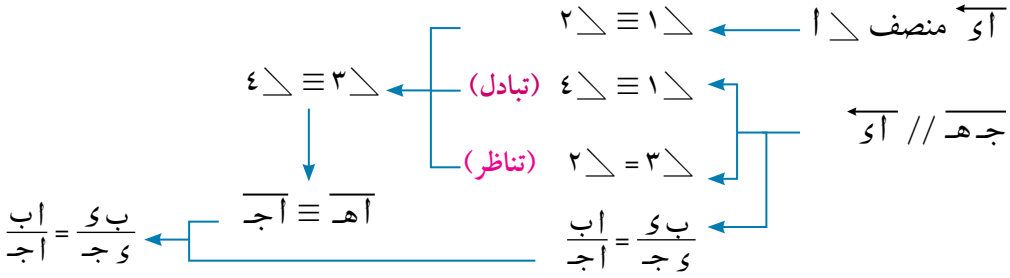
الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم .
- حاسب آلى وبرامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.

المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف $\angle$ ب أ جـ
(من الداخل فى شكل أ ، من الخارج فى شكل ب).

المطلوب : $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

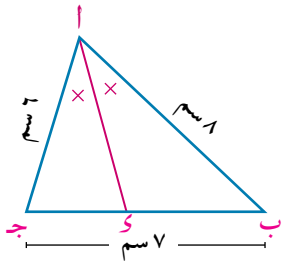
البرهان : ارسم $\overleftrightarrow{جـ هـ}$ // $\overleftrightarrow{أ ء}$ ويقطع $\overleftrightarrow{ب أ}$ فى هـ. اتبع المخطط التالى واكتب البرهان.



مثال

(١) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨سم ، أ جـ = ٦سم ، ب جـ = ٧سم ، رسم أو ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع ب جـ فى و. أوجد طول كل من ب و ، و جـ

الحل



∵ أو ينصف ∠ ب أ جـ ∴ ب و / و جـ = أ ب / أ جـ (نظرية)

∵ أ ب = ٨سم، أ جـ = ٦سم ∴ ب و / و جـ = ٨/٦ = ٤/٣

∵ ب جـ = ب و + و جـ = ٧سم ∴ ب و / ٧ − ب و = ٤/٣

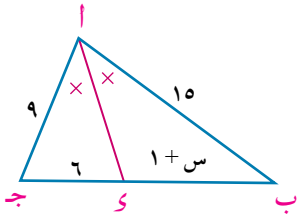
٣ب و = ٢٨ − ٤ ب و (ضرب تبادلى)

٧ب و = ٢٨ ∴ ب و = ٤سم ، جـ و = ٣سم

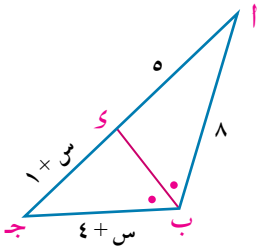
حاول أن تحل

(١) فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)

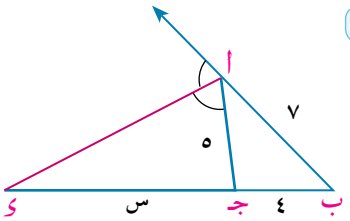
أ



ب



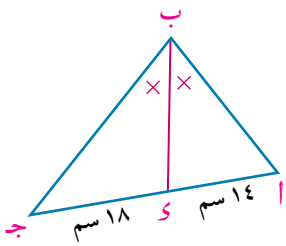
جـ



مثال

(٢) أ ب جـ مثلث. رسم ب و ينصف ∠ ب ، ويقطع أ جـ فى و، حيث أو = ١٤سم، و جـ = ١٨سم. إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٨٠سم، فأوجد طول كل من: ب جـ، أ جـ.

الحل



فى Δ أ ب جـ

∵ ب و ينصف ∠ ب ∴ أ ب / ب جـ = أو / و جـ

∴ أ ب / ب جـ = ١٤/١٨ = ٧/٩

∵ محيط Δ أ ب جـ = ٨٠سم، أ جـ = ١٤ + ١٨ = ٣٢سم

∴ أ ب + ب جـ = ٨٠ − ٣٢ = ٤٨سم

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{٧}{٩}$ ∴ $\frac{\text{أ ب} + \text{ب جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٧+٩}{٩}$ (خواص التناسب)

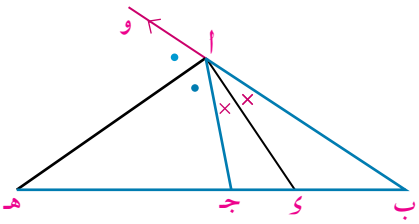
ويكون $\frac{٤٨}{\text{ب جـ}} = \frac{١٦}{٩}$ ∴ ب جـ = ٢٧سم ، أ ب = ٢١سم

حاول أن تحل

(٢) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب. رسم $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ، ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء.
إذا كان طول $\overline{\text{ب ء}}$ = ٢٤سم، ب أ : أ جـ = ٣ : ٥ فأوجد محيط △ أ ب جـ.

ملاحظة هامّة

١- فى المثلث أ ب جـ حيث أ ب ≠ أ جـ:



إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ب أ جـ،

$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ.

فإن: $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

ويكون $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

أى أن $\overline{\text{ب جـ}}$ تنقسم من الداخل فى ء ومن الخارج فى هـ بنسبة واحدة

ويكون المنصفين $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ متعامدين . (لماذا)؟

٢- إذا كان أ ب > أ جـ، قطع منصف ∠أ الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء حيث ب ء > ء جـ، أما منصف الزاوية الخارجة عند أ فيقطع $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ حيث ب هـ > هـ جـ.

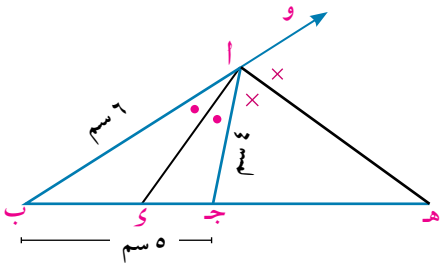
تفكير ناقد

- كلما كبر أ جـ ماذا يحدث للنقطة ء؟
- إذا كان أ جـ = أ ب أين تقع النقطة ء؟ وما وضع $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ بالنسبة إلى $\overline{\text{ب جـ}}$ عندئذٍ؟
- عندما يصبح أ جـ > أ ب ما العلاقة بين ء جـ، ء ب؟ وأين تقع هـ عندئذٍ؟ قارن إجابتك مع زملائك.

مثال

(٣) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٦سم، أ جـ = ٤سم ، ب جـ = ٥سم. رسم $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء، ورسم $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠أ الخارجة ويقطع $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ. احسب طول $\overline{\text{ء هـ}}$.

الحل



∵ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠أ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠أ الخارجة

∴ ء، هـ تقسمان $\overline{\text{ب جـ}}$ من الداخل ومن الخارج بنفس النسبة.

أي أن: $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

∵ ب جـ = ب ء + ء جـ = ٥ ، ب هـ − هـ جـ = ب جـ = ٥

من خواص التناسب نجد

$\frac{ب\,و + و\,جـ}{و\,جـ} = \frac{٣+٢}{٢}$ ∴ $\frac{٥}{و\,جـ} = \frac{٥}{٢}$ ∴ و جـ = ٢

$\frac{ب\,هـ - هـ\,جـ}{هـ\,جـ} = \frac{٣-٢}{٢}$ ∴ $\frac{٥}{هـ\,جـ} = \frac{١}{٢}$ ∴ هـ جـ = ١٠

ويكون و هـ = و جـ + جـ هـ و هـ = ٢ + ١٠ = ١٢سم

حاول أن تحل

(٣) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٣سم، ب جـ = ٧سم، جـ أ = ٦سم. رسم $\overleftarrow{أ\,و}$ ينصف ∠ أ، ويقطع $\overline{ب\,جـ}$ فى و، ورسم $\overline{أ\,هـ}$ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع $\overleftarrow{جـ\,ب}$ فى هـ.

أ أثبت أن $\overline{أ\,ب}$ متوسط فى المثلث أ جـ هـ.

ب أوجد النسبة بين مساحة المثلث أ و هـ، و مساحة المثلث أ جـ هـ.

إيجاد طول المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث.

تمرين مشهور

إذا كان $\overleftarrow{أ\,و}$ ينصف ∠ أ في Δ أ ب جـ من الداخل ويقطع $\overline{ب\,جـ}$ فى و

فإن: $أ\,و = \sqrt{أ\,ب \times أ\,جـ - ب\,و \times و\,جـ}$

المعطيات: أ ب جـ مثلث، $\overleftarrow{أ\,و}$ ينصف ∠ ب أ جـ من الداخل، $\overleftarrow{أ\,و} \cap \overline{ب\,جـ} = \{و\}$

المطلوب: $(أ\,و)^٢ = أ\,ب \times أ\,جـ - ب\,و \times و\,جـ$

البرهان : ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث أ ب جـ

وتقطع $\overleftarrow{أ\,و}$ في هـ، ارسم $\overline{ب\,هـ}$

فيكون: Δ أ جـ و ~ Δ أ هـ ب (لماذا)؟، $\frac{أ\,و}{أ\,ب} = \frac{أ\,جـ}{أ\,هـ}$

∴ أ و × أ هـ = أ ب × أ جـ

أ و × (أ و + و هـ) = أ ب × أ جـ

$(أ\,و)^٢ = أ\,ب \times أ\,جـ - أ\,و \times و\,هـ$

$(أ\,و)^٢ = أ\,ب \times أ\,جـ - ب\,و \times و\,جـ$

أي أن: $أ\,و = \sqrt{أ\,ب \times أ\,جـ - ب\,و \times و\,جـ}$

تذكر

أ و × و هـ = ب و × و جـ

مثال

(٤) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٢٧سم، أ جـ = ١٥سم. رسم $\overleftarrow{أ\,و}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب\,جـ}$ فى و.

إذا كان ب و = ١٨سم احسب طول $\overline{أ\,و}$.

الحل

∵ $\overleftarrow{أ\,و}$ ينصف ∠ ب أ جـ ∴ $\frac{ب\,و}{و\,جـ} = \frac{أ\,ب}{أ\,جـ}$

ويكون $\frac{١٨}{و\,جـ} = \frac{٢٧}{١٥}$ ∴ و جـ = ١٠سم

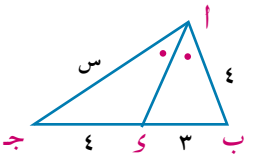
∵ $أ\,و = \sqrt{أ\,ب \times أ\,جـ - ب\,و \times و\,جـ}$

∴ $أ\,و = \sqrt{٢٧ \times ١٥ - ١٨ \times ١٠} = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$ سم

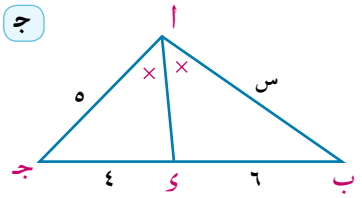
حاول أن تحل

٤ فى كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س وطول $\overline{أ د}$

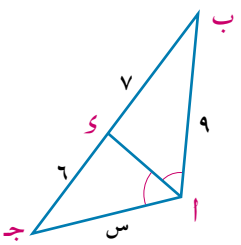
أ



ب

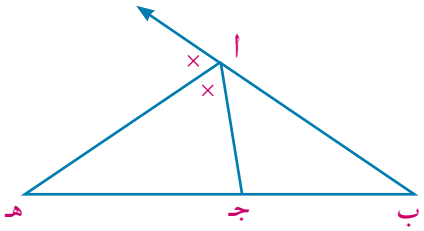


جـ



لاحظ أن: فى الشكل المقابل: $\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ ب أ جـ من الخارج

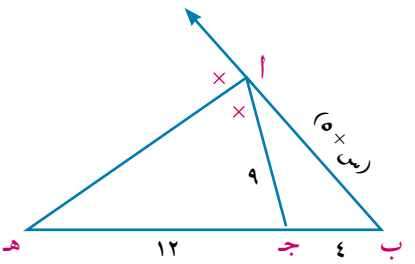
ويقطع $\overleftarrow{ب جـ}$ فى هـ. فإن: أ هـ = $\sqrt{ب هـ \times هـ جـ - أ ب \times أ جـ}$



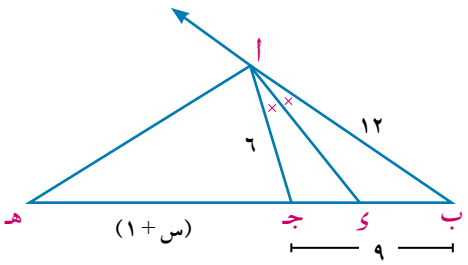
حاول أن تحل

٥ فى كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س، وطول $\overline{أ هـ}$

أ



ب



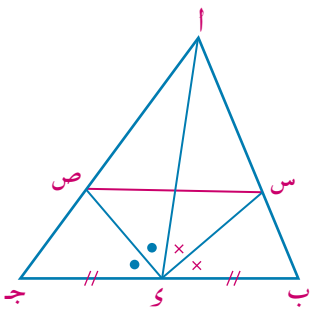
مثال

٥ **فى الشكل المقابل:** $\overline{أ د}$ متوسط فى △ أ ب جـ

$\overleftarrow{د س}$ ينصف ∠ أ د ب. ويقطع $\overline{أ ب}$ فى س.

$\overleftarrow{د ص}$ ينصف ∠ أ د جـ ويقطع $\overline{أ جـ}$ فى ص.

أثبت أن: $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$.



الحل

فى △ أ د ب: ∵ $\overleftarrow{د س}$ ينصف ∠ أ د ب ∴ $\frac{أ د}{د ب} = \frac{أ س}{س ب}$ (١)

فى △ أ د جـ: ∵ $\overleftarrow{د ص}$ ينصف ∠ أ د جـ ∴ $\frac{أ د}{د جـ} = \frac{أ ص}{ص جـ}$ (٢)

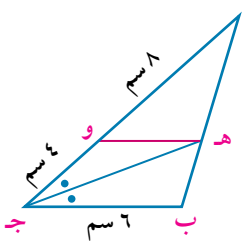
فى △ أ ب جـ: ∵ $\overline{أ د}$ متوسط ∴ د ب = د جـ (٣)

من (١)، (٢)، (٣) $\frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ص}{ص جـ}$ ويكون $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$.

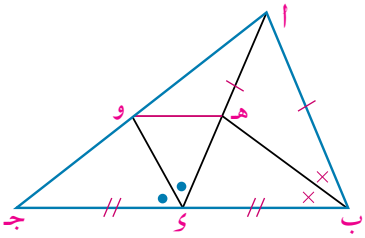
حاول أن تحل

(٦) فى كل من الأشكال التالية أثبت أن: هـ و // ب جـ

أ



ب

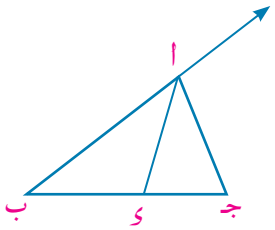


تفكير منطقى

فى الشكل المقابل: ى ∈ ب جـ.

كيف يمكن رسم جـ هـ يقطع ب ا فى هـ لحساب النسبة $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}}$؟

إذا كان $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$ ماذا نستنتج؟

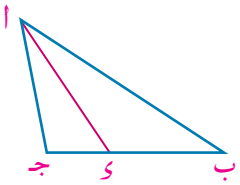


حالات خاصة

١- فى △ ا ب جـ:

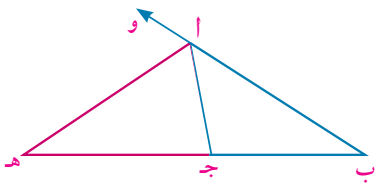
إذا كان ى ∈ ب جـ، حيث $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$

فإن: ا ى ينصف ∠ ب ا جـ



وإذا كان هـ ∈ ب جـ، هـ ≠ ب جـ، حيث $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$

فإن: ا هـ ينصف ∠ ا الخارجة عن المثلث ا ب جـ

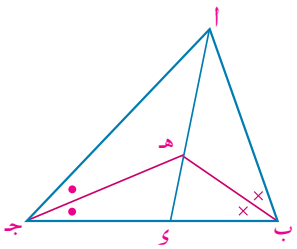


ويعرف هذا بعكس النظرية السابقة.

٢- فى الشكل المقابل:

ب هـ ، جـ هـ منصفا زاويتا ب، جـ

يتقاطعا فى نقطة هـ ∈ ا ى . ماذا تستنتج؟



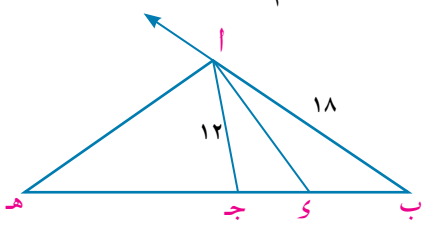
حقيقة: منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

مثال

(٦) ا ب جـ مثلث فيه ا ب = ١٨سم، ب جـ = ١٥سم، ا جـ = ١٢سم، ى ∈ ب جـ، حيث ب ى = ٩سم

رسم ا هـ ⊥ ا ى فقطع ب جـ فى هـ. أثبت أن ا ى ينصف ∠ ب ا جـ ثم أوجد طول جـ هـ.

الحل



فى △ ا ب جـ: $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

جـ ى = ب جـ − ب ى = ١٥ − ٩ = ٦سم

∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا جـ}}$ ا ى ينصف ∠ ب ا جـ

∵ $\overleftrightarrow{أهـ} \perp \overline{أو}$ ويقطع $\overleftarrow{ب جـ}$ فى هـ

∴ $\overleftrightarrow{أهـ}$ ينصف $\angle$ أ الخارجة عن Δ أ ب جـ ويكون $\frac{ب هـ}{هـ جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

∵ ب هـ = ب جـ + جـ هـ ∴ $\frac{١٥ + جـ هـ}{جـ هـ} = \frac{١٨}{١٢}$ جـ هـ = ٣٠سم

حاول أن تحل

(٧) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ١٨سم، ب جـ = ١٢سم. هـ ∈ $\overline{أو}$ بحيث ٢ أ هـ = ٣ هـ ء

رسم $\overleftarrow{هـ و}$ // $\overleftarrow{ء جـ}$ فقطع $\overline{أجـ}$ فى و. أثبت أن $\overleftarrow{ب و}$ ينصف $\angle$ أ ب جـ.

مثال

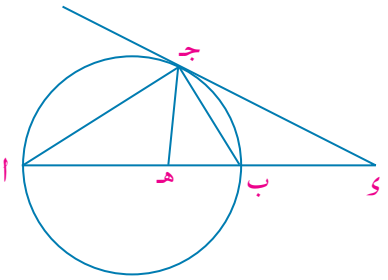
(٧) $\overline{أب}$ قطر فى دائرة، $\overline{أجـ}$ وتر فيها. رسم $\overleftarrow{جـ ء}$ مماس للدائرة عند جـ فقطع $\overleftarrow{أب}$ فى ء.

إذا كانت هـ ∈ $\overline{أب}$ بحيث $\frac{ء ب}{ب هـ} = \frac{ء جـ}{جـ هـ}$ أثبت أن:

أ $\overleftarrow{أجـ}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث جـ ء هـ عند جـ.

ب $\frac{ء أ}{ء ب} = \frac{أ هـ}{ب هـ}$

الحل



∵ $\frac{ء ب}{ب هـ} = \frac{ء جـ}{جـ هـ}$ (١)

∴ $\overleftarrow{جـ ب}$ ينصف $\angle$ جـ فى Δ ء جـ هـ.

∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

∴ ق($\angle$ أ جـ ب) = ٩٠° ويكون $\overleftarrow{جـ أ} \perp \overleftarrow{جـ ب}$

∵ $\overleftarrow{جـ ب}$ ينصف $\angle$ جـ فى Δ أ ب جـ

∴ $\overleftarrow{جـ أ}$ منصف للزاوية الخارجة عند جـ (منصفا الزاوية متعامدان)

ويكون $\frac{ء أ}{أ هـ} = \frac{ء جـ}{جـ هـ}$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: $\frac{ء أ}{أ هـ} = \frac{ء ب}{ب هـ}$ ∴ $\frac{ء أ}{أ هـ} = \frac{أ هـ}{ب هـ}$ (وهو المطلوب ثانيًا)

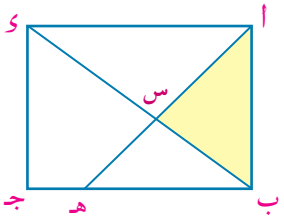
(وهو المطلوب أولًا)

حاول أن تحل

(٨) دائرتان م، ن متماستان من الخارج فى أ. رسم مستقيم يوازى $\overline{م ن}$ فقطع الدائرة م فى ب، جـ، والدائرة ن فى ء، هـ على الترتيب. فإذا تقاطع $\overleftarrow{ب م}$، $\overleftarrow{هـ ن}$ فى النقطة و. أثبت أن $\overleftarrow{أ و}$ ينصف $\angle$ م و ن.

تحقق من فهمك

حل مشكلات: **يبين الشكل المقابل** تقسيمًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل إلى أربعة أقسام مختلفة بالمساحة بالمستقيمين $\overleftrightarrow{ب ء}$، $\overleftrightarrow{أهـ}$، حيث هـ ∈ $\overline{ب جـ}$، $\overleftrightarrow{ب ء} \cap \overleftrightarrow{أهـ}$ = {س}.



فإذا كان أ ب = ب هـ = ٤٢مترًا، أ ء = ٥٦ مترًا.

احسب مساحة القطعة أ ب س بالأمتار المربعة و طول $\overline{أس}$

٣ - ٣

تطبيقات التناسب فى الدائرة

Applications of Proportionality in the Circle

سوف تتعلم

- إيجاد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
- تحديد موقع نقطة بالنسبة لدائرة.
- إيجاد قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة.
- نمذجة وحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلى والخارجى لزاوية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قوة نقطة Power of a point
- دائرة Circle
- وتر Chord
- مماس Tangent
- قاطع Secant
- قطر Diameter
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles
- مماس خارجى مشترك Common External Tangent
- مماس داخلى مشترك Common Internal Tangent

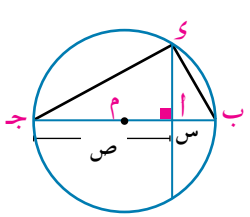
الأدوات والوسائل

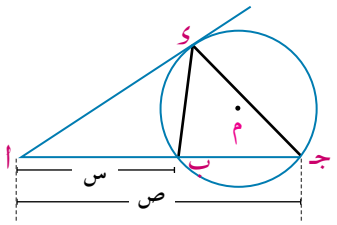
- أدوات هندسية للرسم والقياس

فكر و ناقش

كيف يمكن إنشاء قطعة مستقيمة يكون طولها ل وسطًا متناسبًا بين طولين س، ص لقطعتين معلومتين؟

فى كل من الشكلين التاليين أ ب = س ، أجـ = ص ، أ ء = ل





∵ △ أ ء ب ~ △ أ جـ ء (لماذا؟) ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ جـ}}$

ويكون $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}}{\text{ص}}$ ، ل^{٢} = س × ص أى أن ل وسط متناسب بين س، ص

عمل تعاونى

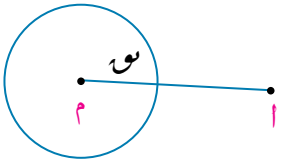
أنشئ قطعًا مستقيمة أطوالها $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٥}$ ، $\sqrt{٢٤}$

قارن رسمك مع زملائك وتحقق من صحة إجابتك مستخدمًا الآلة الحاسبة والقياس.

أولاً: قوة نقطة بالنسبة لدائرة Power of a point

تعريف

قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ﻫ هو العدد الحقيقى ﻫ$_{م}$(أ) حيث: ﻫ$_{م}$(أ) = (أ م)^{٢} − ﻫ^{٢}



ملاحظات هامَّة

ملاحظة ١

يمكن التنبؤ بموقع نقطة أ بالنسبة للدائرة م

فإذا كان: ﻫ$_{م}$ (أ) > ٠ فإن أ تقع خارج الدائرة.

ﻫ$_{م}$ (أ) = ٠ فإن أ تقع على الدائرة.

ﻫ$_{م}$ (أ) < ٠ فإن أ تقع داخل الدائرة.

مثال

(١) حدِّد موقع كلٍّ من النقط أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥سم إذا كان:
و$_{م}$ (أ) = ١١ ، و$_{م}$ (ب) = صفر ، و$_{م}$ (جـ) = −١٦، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة.

الحل

∵ و$_{م}$ (أ) = ١١ > ٠ ∴ أ تقع خارج الدائرة

∵ و$_{م}$ (أ) = (أ م)^{٢} − ن^{٢} ∴ ١١ = (أ م)^{٢} − ٢٥ ∴ أ م = ٦سم

∵ و$_{م}$ (ب) = صفر ∴ ب تقع على الدائرة ∴ ب م = ٥سم

∵ و$_{م}$ (جـ) = −١٦ ∴ جـ تقع داخل الدائرة

∵ و$_{م}$ (جـ) = (جـ م)^{٢} − ن^{٢} ∴ −١٦ = (جـ م)^{٢} − ٢٥ ∴ جـ م = ٣سم

حاول أن تحل

(١) حدِّد موقع كلٍّ من النقط أ، ب، جـ بالنسبة للدائرة ن التى طول نصف قطرها ٣سم فى كل من الحالات الآتية:

أ و$_{ن}$ (أ) = ١٥ ب و$_{ن}$ (ب) = صفر ج و$_{ن}$ (جـ) = −٤

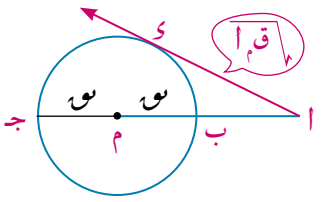
ملاحظة ٢

إذا وقعت النقطة أ خارج الدائرة م فإن: و$_{م}$ (أ) = (أ م)^{٢} − ن^{٢}

= (أ م − ن) (أ م + ن)

= أ ب × أ جـ = (أ ى)^{٢}

∴ طول المماس المرسوم من النقطة أ للدائرة م = $\sqrt{\text{و}_{م}(أ)}$



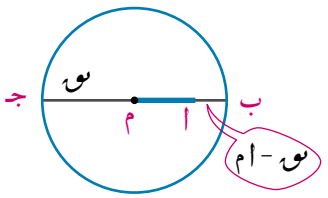
ملاحظة ٣

إذا وقعت النقطة أ داخل الدائرة م فإن: و$_{م}$ (أ) = (أ م)^{٢} − ن^{٢}

= (أ م − ن)(أ م + ن)

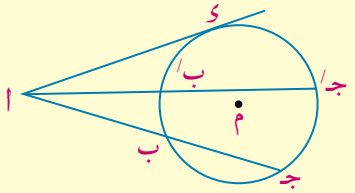
= − (ن − أ م)(أ م + ن)

= − أ ب × أ جـ



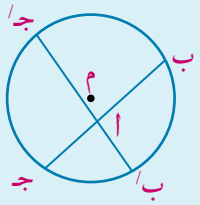
وبصفة عامة

أ خارج الدائرة م



و$_{م}$ (أ) = أ ب × أ جـ = أ ب/ × أ جـ/ = (أ ى)^{٢}

أ داخل الدائرة م



و$_{م}$ (أ) = − أ ب × أ جـ = − أ ب/ × أ جـ/

مثال

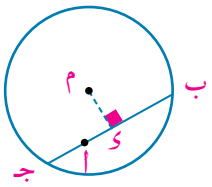
(٢) الدائرة م طول نصف قطرها ٣١سم. النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣سم، رسم الوتر $\overline{ب جـ}$ حيث أ ∈ $\overline{ب جـ}$، أ ب = ٣ أ جـ احسب:

أ طول الوتر $\overline{ب جـ}$ ب بعد الوتر $\overline{ب جـ}$ عن مركز الدائرة.

الحل

في الدائرة م:

أ ∵ ق = ٣١سم، أ م = ٢٣سم، أ ∈ $\overline{ب جـ}$ ∴ أ تقع داخل الدائرة ويكون



ق$_م$(أ) = (أ م)^٢ − ق^٢ = − أ ب × أ جـ

(٢٣)^٢ − (٣١)^٢ = − ٣ أ جـ × أ جـ ∴ أ جـ = ١٢سم

∴ طول الوتر $\overline{ب جـ}$ = ٤ أ جـ = ١٢ × ٤ = ٤٨سم

ب بفرض أن بعد الوتر عن مركز الدائرة = م ء حيث $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∵ $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ∴ ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ويكون ب ء = ٢٤سم

∴ (م ء)^٢ = (٣١)^٢ − (٢٤)^٢ = ٣٨٥ ∴ م ء = $\sqrt{٣٨٥}$ ≃ ١٩,٦سم

حاول أن تحل

(٢) الدائرة ن طول نصف قطرها ٨سم. النقطة ب تبعد ١٢سم عن مركز الدائرة، رسم مستقيم يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة في نقطتين جـ، ء، حيث جـ ب = جـ ء، احسب طول الوتر $\overline{جـ ء}$ وبعده عن النقطة ن.

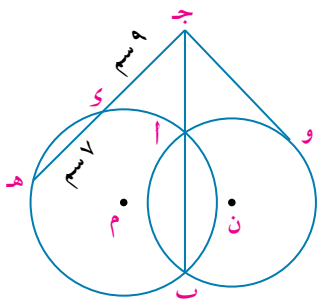
مثال

(٣) دائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب. جـ ∈ $\overleftarrow{ب أ}$، جـ ∉ $\overline{ب أ}$، رسم $\overleftarrow{جـ ء}$ فقطع الدائرة م في ء، هـ حيث جـ ء = ٩سم، ء هـ = ٧سم، ورسم $\overleftarrow{جـ و}$ يمس الدائرة ن عند و.

أ أثبت أن ق$_م$(جـ) = ق$_ن$(جـ). ب إذا كان أ ب = ١٠سم. أوجد طول كل من $\overline{أ جـ}$، $\overline{جـ و}$.

الحل

أ ∵ جـ تقع خارج الدائرة م، $\overleftarrow{جـ هـ}$، $\overleftarrow{جـ ب}$ قاطعان للدائرة م.



∴ ق$_م$(جـ) = جـ ء × جـ هـ = جـ أ × جـ ب (١)

∵ جـ تقع خارج الدائرة ن، $\overleftarrow{جـ ب}$ قاطع، $\overline{جـ و}$ مماس لها.

∴ ق$_ن$(جـ) = جـ أ × جـ ب = (جـ و)^٢ (٢)

من (١)، (٢) ∴ ق$_م$(جـ) = ق$_ن$(جـ) = ٩ × ١٦ = ١٤٤

ب ∵ أ ب = ١٠سم ∴ ق$_ن$(جـ) = جـ أ (جـ أ + ١٠) = (جـ و)^٢ = ١٤٤

∵ (جـ أ)^٢ + ١٠ جـ أ = ١٤٤ ∴ جـ أ = ٨سم

∵ (جـ و)^٢ = ١٤٤ ∴ جـ و = ١٢سم

ملاحظة هامَّة

تسمى مجموعة النقاط التى لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسى للدائرتين.

فإذا كان $ق_{م}(أ) = ق_{ن}(أ)$ **فإن** أ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م، ن.

فى المثال السابق لاحظ أن: $ق_{م}(جـ) = ق_{ن}(جـ)$ ، $ق_{م}(أ) = ق_{ن}(أ) =$ صفرًا ، $ق_{م}(ب) = ق_{ن}(ب) =$ صفرًا

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسى للدائرتين م، ن.

حاول أن تحل

(٣) الدائرتان م، ن متماستان من الخارج فى أ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك للدائرتين م، ن، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يقطع الدائرة م فى جـ، ى، $\overleftrightarrow{ب هـ}$ يقطع الدائرة ن فى هـ، و على الترتيب.

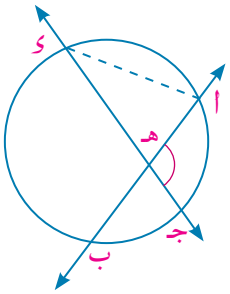
أ **أثبت أن:** $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسى للدائرتين م، ن

ب إذا كان $ق_{م}(ب) = ٣٦$ ، ب جـ = ٤سم ، هـ و = ٩سم. **أوجد طول** كل من $\overline{جـ ى}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{ب هـ}$.

ثانيًا: القاطع والمماس وقياسات الزوايا

سبق ودرست:

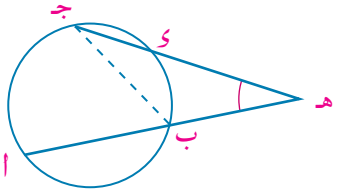
١- إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التى تقابلها بالرأس.



فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ ى} = \{هـ\}$

فإن: $ق(\angle أ هـ جـ) = \frac{١}{٢}[ق(\overset{\frown}{أ جـ}) + ق(\overset{\frown}{ى ب})]$

٢- إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.



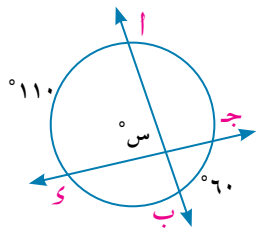
فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ ى} = \{هـ\}$

فإن: $ق(\angle أ هـ جـ) = \frac{١}{٢}[ق(\overset{\frown}{أ جـ}) - ق(\overset{\frown}{ى ب})]$

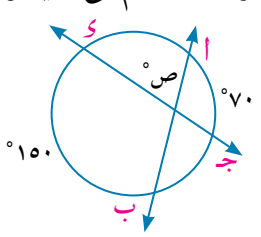
حاول أن تحل

(٤) فى كل من الأشكال الآتية: أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.

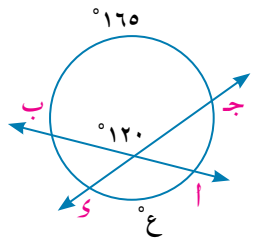
أ



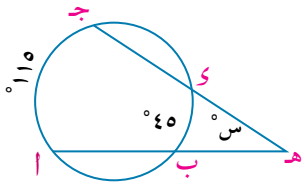
ب



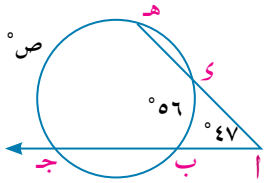
جـ



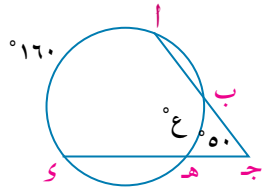
د



هـ



و



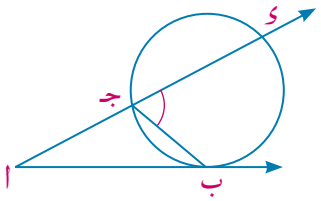
استنتاج قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس (أو مماسين) لدائرة.

تمرين مشهور

القاطع والمماس (أو المماسان) لدائرة المتقاطعان خارج الدائرة، يكون قياس زاوية تقاطعهما مساويًا نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

البرهان

الحالة الأولى: تقاطع القاطع والمماس لدائرة.



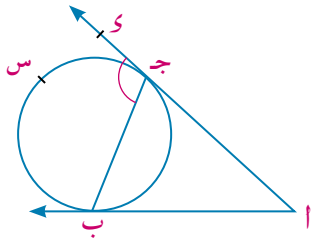
∵ ∠ ء جـ ب خارجة عن △ا ب جـ

∴ ق(∠ا) = ق(∠ ب جـ ء) − ق(∠ جـ ب ا)

$= \frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{ب ء}$) − $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{ب جـ}$)

$= \frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{ب ء}$) − ق($\overset{\frown}{ب جـ}$)]

الحالة الثانية: تقاطع مماسين لدائرة.



∵ ∠ ء جـ ب خارجة عن △ا ب جـ

∴ ق(∠ا) = ق(∠ ب جـ ء) − ق(∠ جـ ب ا)

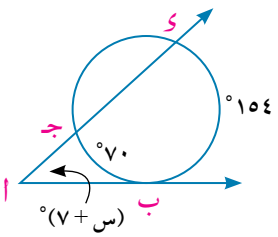
$= \frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{ب س جـ}$) − $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{ب جـ}$)

$= \frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{ب س جـ}$) − ق($\overset{\frown}{ب جـ}$)]

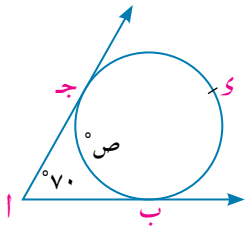
حاول أن تحل

٥ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس.

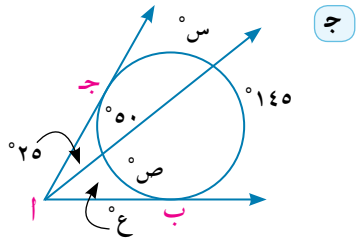
أ



ب



جـ



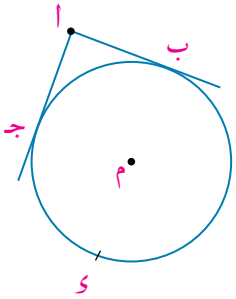
مثال

٤ **الربط بالأقمار الصناعية:** يدور قمر صناعى فى مدار، محافظًا فى أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق منطقة خط الاستواء، وتستطيع آلة التصوير به رصد قوس طوله ٦٠١١ كم على سطح الأرض. إذا كان قياس هذا القوس ٥٤°. فأوجد:

أ قياس زاوية آلة التصوير الموضوعة على القمر الصناعى.

ب طول نصف قطر الأرض عند دائرة خط الاستواء.

الحل



نمذجة المشكلة: باعتبار الدائرة م هى دائرة خط الاستواء يكون
ق(ب جـ) = ٥٤°، وطول $\overset{\frown}{ب\,جـ}$ = ٦٠١١ كم.

أ ∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(ب ء جـ) = ٣٦٠° − ٥٤° = ٣٠٦°

ويكون ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(ب ء جـ) − ق(ب جـ)]

= $\frac{1}{2}$ (٣٠٦° − ٥٤°) = ١٢٦°

ب فى الدائرة يتناسب طول القوس مع قياسه

$\frac{٦٠١١}{٢ \times \pi \times ن} = \frac{٥٤^\circ}{٣٦٠^\circ}$ ∴ ن = ٦٣٧٧,٨٧ كم

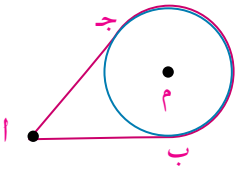
∴ طول نصف قطر الأرض عند خط الاستواء ≃ ٦٣٧٨ كم.

تذكر

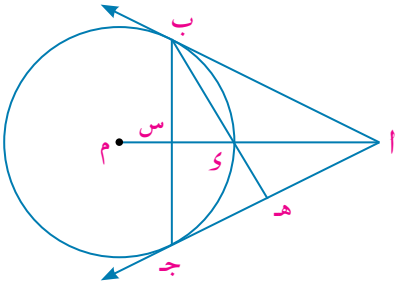
$\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط دائرته}} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}}$

حاول أن تحل

٦ تدور بكرة عند محور م بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة عند أ. فإذا كان قياس الزاوية بين جزئى السير ٤٠°. فأوجد طول $\overset{\frown}{ب\,جـ}$ الأكبر، علمًا بأن طول نصف قطر البكرة الكبرى ٩سم.



٧ **فى الشكل المقابل:** دائرة م طول نصف قطرها ٩سم، $\overleftarrow{أ\,ب}$ ، $\overleftarrow{أ\,جـ}$ مماسان للدائرة عند ب، جـ. $\overline{أ\,م}$ يقطع الدائرة فى ء، $\overline{ب\,جـ}$ فى س رسم $\overleftarrow{ب\,ء}$ فقطع $\overline{أ\,جـ}$ فى هـ. إذا كان ق(∠أ) = ١٤٤° أوجد:



أ طول $\overline{أ\,ب}$

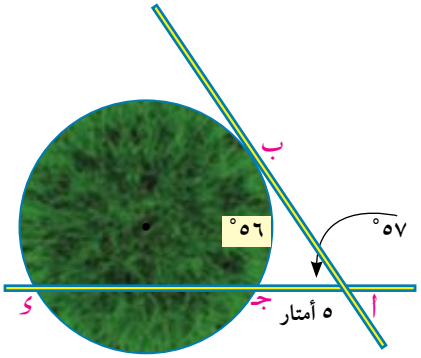
ب طول $\overline{أ\,س}$.

تحقق من فهمك

حل مشكلات: يبين الشكل المقابل مخططًا لحديقة على شكل دائرة. أنشئ ممرين للمشاة أحدهما خارج الحديقة يمسها فى النقطة ب والآخر يقطع الحديقة فى نقطتى جـ، ء ويتقاطع الممران عند أ.

إذا كان ق(∠أ) = ١٠٠°، أ جـ = ٥ أمتار.

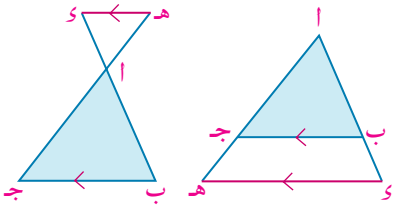
أوجد طول كل من $\overline{أ\,ب}$ ، $\overline{جـ\,ء}$ ، ثم أوجد ق(ب ء).



ملخص الوحدة

نظرية ١ : إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث و يقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع متناسبة.

نتيجة: إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازى ضلعًا من أضلاع المثلث وليكن $\overline{ب جـ}$ ويقطع $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ جـ}$ فى ء، هـ على الترتيب (كما فى الشكل)



فإن: $\frac{أ ب}{ب ء} = \frac{أ جـ}{هـ جـ}$

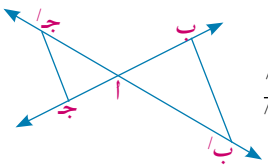
$\frac{أ ء}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ جـ}$

$\frac{أ ء}{ب ء} = \frac{أ هـ}{جـ هـ}$

عكس نظرية ١ : إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.

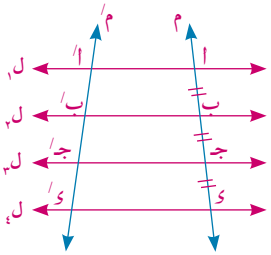
نظرية تاليس العامة Talis Theorem: إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

حالات خاصة



١- إذا تقاطع المستقيمان م ، م/ فى النقطة أ وكان: $\overleftrightarrow{ب ب/} // \overleftrightarrow{جـ جـ/}$، فإن: $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{أ ب/}{أ جـ/}$

وبالعكس: إذا كان: $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{أ ب/}{أ جـ/}$ فإن: $\overleftrightarrow{ب ب/} // \overleftrightarrow{جـ جـ/}$



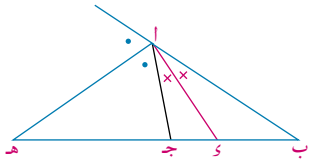
٢- إذا كان ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤،

وقطعها المستقيمان م، م/ وكان: أ ب = ب جـ = جـ ء

فإن: أ/ ب/ = ب/ جـ/ = جـ/ ء/

نظرية ٣ منصف زاوية مثلث Triangle- Angle - Bisector: إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولى الضلعين الآخرين

ملاحظة هامَّة: فى الشكل المقابل



١- $\overline{ب جـ}$ تنقسم من الداخل فى ء ومن الخارج فى هـ بنسبة واحدة فيكون $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{ب هـ}{هـ جـ}$

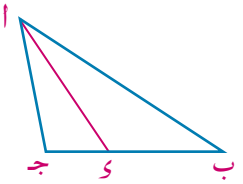
٢- المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية متعامدان؛ أى أن : $\overleftrightarrow{أ ء} \perp \overleftrightarrow{أ هـ}$

٣- إذا كان أ ب > أ جـ، قطع منصف $\angle$ أ الضلع $\overline{ب جـ}$ فى ء، حيث ب ء > ء جـ ،أما منصف الزاوية الخارجة عند أ فيقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ فى هـ، حيث ب هـ > هـ جـ.

٤- $أ ء = \sqrt{أ ب \times أ جـ - ب ء \times ء جـ}$

٥- $أ هـ = \sqrt{أ ب \times أ جـ - ب هـ \times هـ جـ}$

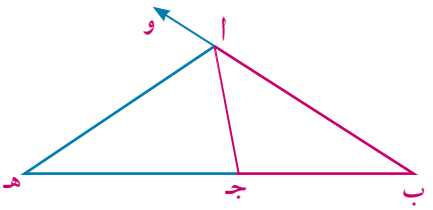
حالات خاصة عكس نظرية (٣)



١ - فى △ ا ب جـ:

إذا كان ء ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث $\frac{ب ء}{ء جـ} = \frac{ب ا}{ا جـ}$

فإن: $\overleftarrow{ا ء}$ ينصف ∠ ب ا جـ



وإذا كان هـ ∈ $\overleftarrow{ب جـ}$، هـ ∉ $\overline{ب جـ}$، حيث $\frac{ب هـ}{هـ جـ} = \frac{ب ا}{ا جـ}$

فإن: $\overleftarrow{ا هـ}$ ينصف ∠ ا الخارجة عن المثلث ا ب جـ

٢ - حقيقة: منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.

أولًا: قوة نقطة بالنسبة لدائرة Power of a point

قوة النقطة ا بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ر هو العدد الحقيقى و$_م$(ا) حيث:

و$_م$(ا) = (ا م)^2 − ر^2

فإذا كان و$_م$ (ا) < ٠ فإن ا تقع خارج الدائرة م

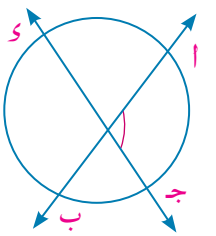
و$_م$ (ا) = ٠ ا تقع على الدائرة م

و$_م$ (ا) > ٠ ا تقع داخل الدائرة م

ثانيًا: القاطع والمماس وقياسات الزاوية.

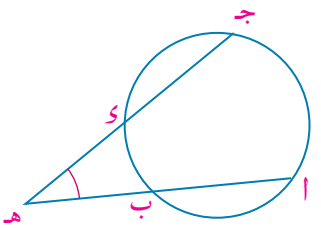
١ - قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطعين داخل دائرة:

(أ) داخل الدائرة



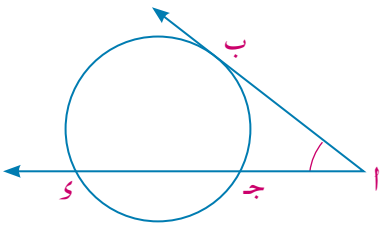
و(∠ ا هـ جـ) = $\frac{1}{2}$[و($\overset{\frown}{ا جـ}$) + و($\overset{\frown}{ء ب}$)]

(ب) خارج الدائرة:



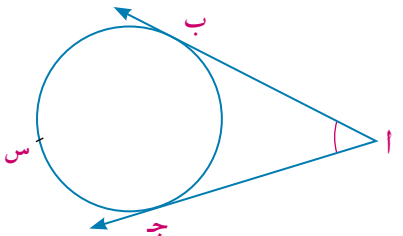
و(∠ ا هـ جـ) = $\frac{1}{2}$[و($\overset{\frown}{ا جـ}$) − و($\overset{\frown}{ب ء}$)]

٢ - قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس للدائرة



و(∠ ا) = $\frac{1}{2}$[و($\overset{\frown}{ب ء}$) − و($\overset{\frown}{ب جـ}$)]

٣ - قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماسين لدائرة.



و(∠ ا) = $\frac{1}{2}$ [و($\overset{\frown}{ب س جـ}$) − و($\overset{\frown}{ب جـ}$)]



أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يتعرف نوع قياس الزوايا بالتقديرين (الستينى والدائرى).
- يتعرف القياس الدائرى للزوايا المركزية فى دائرة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائرى إلى القياس الستينى والعكس.
- يتعرف الدوال المثلثية .
- يحدد إشارات الدوال المثلثية فى الأرباع الأربعة.
- يستنتج أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.
- يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة ولأى زاوية.
- يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- يتعرف الزوايا المنتسبة $(180^\circ \pm \theta)$، $(360^\circ \pm \theta)$، $(90^\circ \pm \theta)$، $(270^\circ \pm \theta)$.
- يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة:
 - جا أس = جتا ب س
 - ظا أس = ظتا ب س
 - قا أس = قتا ب س
- يوجد قياس زاوية معلوم إحدى قيم الدوال المثلثية لها .
- يتعرف التمثيل البيانى لدوال الجيب وجيب التمام ويستنتج خواص كل منهما.
- يستخدم الآلة الحاسبة العلمية فى حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ينمذج بعض الظواهر الفيزيائية والحياتية والتى تمثلها دوال مثلثية.
- يستخدم تكنولوجيا المعلومات فى التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.

المصطلحات الأساسية

- قياس ستينى Degree Measure
- قياس دائرى Radian Measure
- زاوية موجهة Directed Angle
- زاوية نصف قطرية (راديان) Radian
- وضع قياسى Standard Position
- قياس موجب Positive Measure
- قياس سالب Negative Measure
- زاوية مكافئة Equivalent Angle
- زاوية ربعية Quadrant Angle
- دالة مثلثية Trigonometric Function
- جيب Sine
- جيب تمام Cosine
- ظل Tangent
- قاطع تمام Cosecant
- قاطع Secant
- ظل تمام Cotangent
- دالة دائرية Circular Function



دروس الوحدة

الدرس (٤ – ١): الزاوية الموجهة.

الدرس (٤ – ٢): وحدات قياس الزاوية.

الدرس (٤ – ٣): الدوال المثلثية.

الدرس (٤ – ٤): العلاقة بين الدوال المثلثية.

الدرس (٤ – ٥): التمثيل البيانى للدوال المثلثية.

الدرس (٤ – ٦): إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية.

الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية – ورق مربعات – حاسب آلى – برامج رسم بيانى.

نبذه تاريخية

حساب المثلثات هو أحد فروع علم الرياضيات، فهو يختص بالحسابات الخاصة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه. وقد نشأ هذا العلم ضمن الرياضيات القديمة خصوصا فيما يتعلق بحسابات علم الفلك التى اهتم بها الإنسان القديم لما يتأمله ويشاهده فى الكون من حركة الشمس والقمر والنجوم والكواكب.

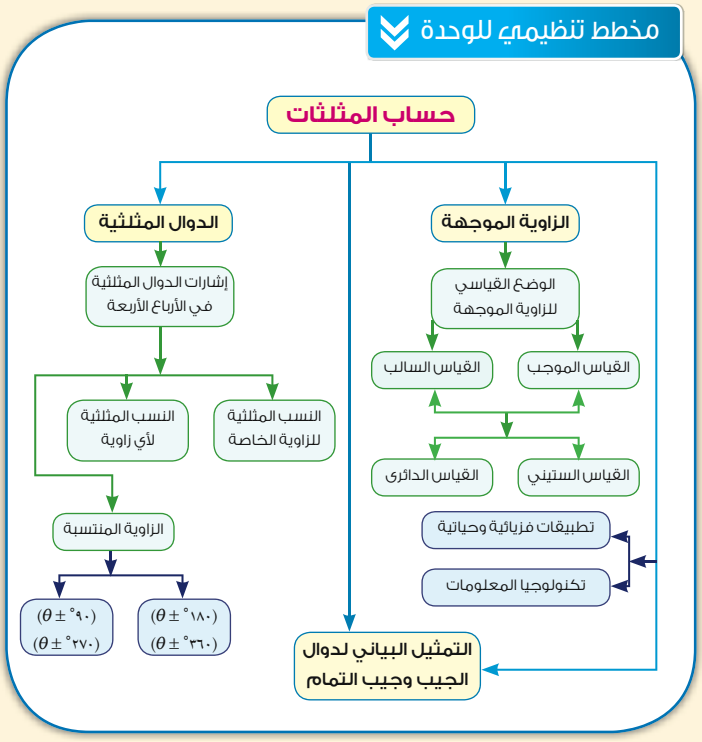
ويعد الرياضى العربى نصير الدين الطوسى هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك.

وكان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب، ويذكر أن اصطلاح (الظل) قد وصفه العالم العربى أبو الوفا البوزجانى (٩٤٠ – ٩٩٨م) فى القرن العاشر الميلادى، وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام التى تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس فى خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة فى حساب المثلثات المستوى والكروى (نسبة إلى سطح الكرة) وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة، وأضافوا إليها أيضا الكثير.

حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا العديد من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته فى شتى المعارف العلمية والعملية، وساهم فى دفع عجلة التقدم والازدهار.

مخطط تنظيمي للوحدة



الزاوية الموجهة
Directed Angle

١ - ٤

سوف تتعلم

- مفهوم الزاوية الموجهة.
- الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثي المتعامد .
- مفهوم الزوايا المتكافئة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

قياس ستينى	Degree Measure
زاوية موجهة	Directed angle
وضع قياسى	Standard Position
قياس موجب	Positive measure
قياس سالب	Negative measure
زاوية مكافئة	Equivalent Angle
زاوية ربعية	Quadrantal Angle

الأدوات والوسائل

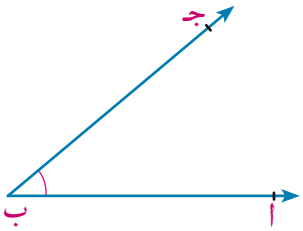
- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

سبق لك أن تعرفت على أن الزاوية هى اتحاد شعاعيين لهما نقطة بداية واحدة.

في الشكل المرسوم تسمى النقطة ب «**رأس الزاوية**».

والشعاعان $\overrightarrow{ب\,أ}$ ، $\overrightarrow{ب\,جـ}$ **ضلعا الزاوية.**



أى أن: $\overrightarrow{ب\,أ} \cup \overrightarrow{ب\,جـ} = (\angle أ\,ب\,جـ)$

وتكتب كذلك $أ\,\hat{ب}\,جـ$.

القياس الستينى للزاوية Degree Measure System

علمت أن القياس الستينى يعتمد على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية فى الطول.

وبالتالى فإن:

١- الزاوية المركزية التى ضلعاها يمران بنهايتى أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة (١°)

٢- تنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى دقيقة، وترمز له بالرمز (١′)

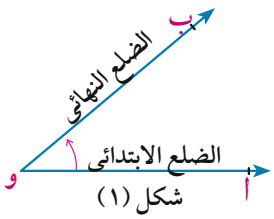
٣- تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى ثانية، وترمز له بالرمز (١″)

أى أن: ١° = ٦٠′ ، ١′ = ٦٠″

تعلم

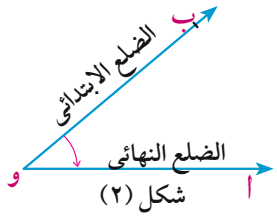
الزاوية الموجهة Directed Angle

إذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية فإنه يمكن كتابتهما على شكل الزوج المرتب ($\overrightarrow{و\,أ}$ ، $\overrightarrow{و\,ب}$) حيث العنصر الأول $\overrightarrow{و\,أ}$ هو الضلع الابتدائى للزاوية، العنصر الثانى $\overrightarrow{و\,ب}$ هو الضلع النهائى للزاوية التي رأسها نقطة و كما بالشكل (١).



شكل (١)

أما إذا كان الضلع الابتدائى $\overrightarrow{و\,ب}$، الضلع النهائى $\overrightarrow{و\,أ}$ فتكتب عندئذ ($\overrightarrow{و\,ب}$، $\overrightarrow{و\,أ}$) كما فى شكل (٢).



شكل (٢)

تعريف

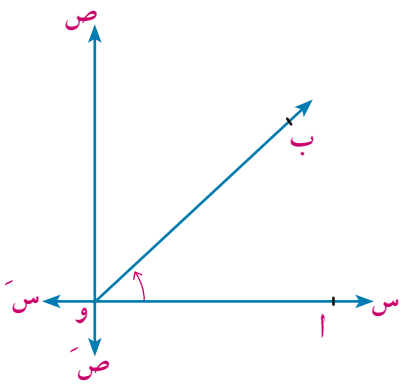
الزاوية الموجهة هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية، لهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية.

تفكير ناقد:

➤ هل ($\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وب}$) = ($\overrightarrow{وب}$ ، $\overrightarrow{وأ}$)؟ فسِّر إجابتك.

الوضع القياسى للزاوية الموجهة Standard position of the directed angle

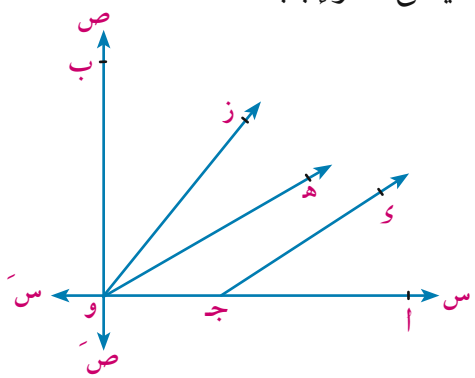
تكون الزاوية فى وضع قياسى إذا كان رأس هذه الزاوية هو نقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد، وضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.



هل ∠ أ و ب الموجهة فى الوضع القياسى؟ فسِّر إجابتك.

تعبير شفهى

أيٌّ من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسى؟ فسِّر إجابتك .



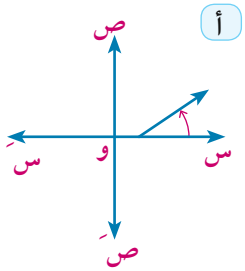
أ ($\overrightarrow{جـأ}$ ، $\overrightarrow{جـى}$) ب ($\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وهـ}$)

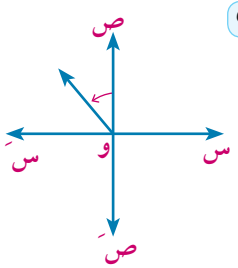
جـ ($\overrightarrow{وهـ}$ ، $\overrightarrow{وأ}$) د ($\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وز}$)

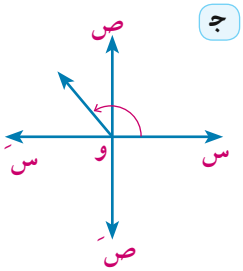
هـ ($\overrightarrow{وب}$ ، $\overrightarrow{وز}$) و ($\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وب}$)

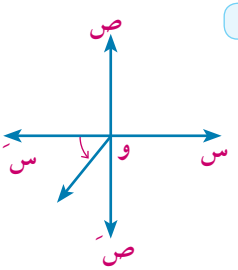
حاول أن تحل

(١) أى الزوايا الموجهة التالية فى وضعها القياسى؟ فسِّر إجابتك.

أ


ب


جـ


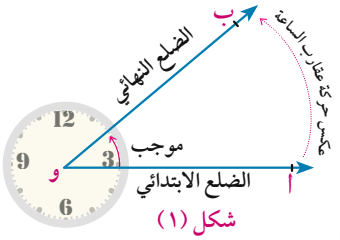
د


القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة:

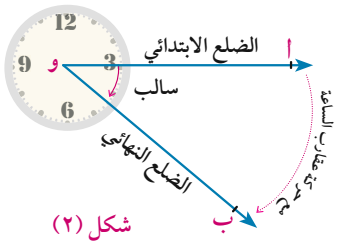
Positive and negative measures of a directed angle

في شكل (١) يكون قياس الزاوية الموجهة موجبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي $\overrightarrow{و\,أ}$ إلى الضلع النهائي $\overleftarrow{و\,ب}$ ، فى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

في شكل (٢) يكون قياس الزاوية الموجهة سالبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي $\overrightarrow{و\,أ}$ إلى الضلع النهائي $\overleftarrow{و\,ب}$ ، هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.



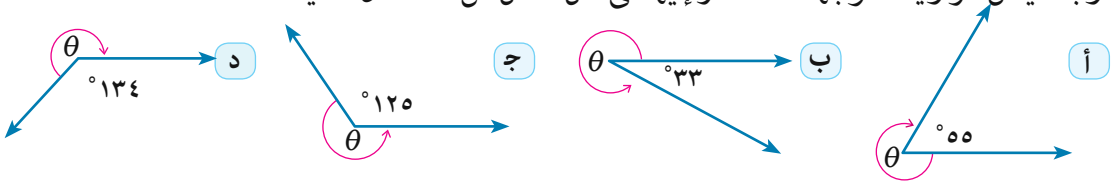
شكل (١)



شكل (٢)

مثال

(١) أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية:



الحل

نعلم أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى ٣٦٠°

أ اتجاه الزاوية θ هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة — ق(∠θ) = − (٣٦٠° − ٥٥°) = − ٣٠٥°

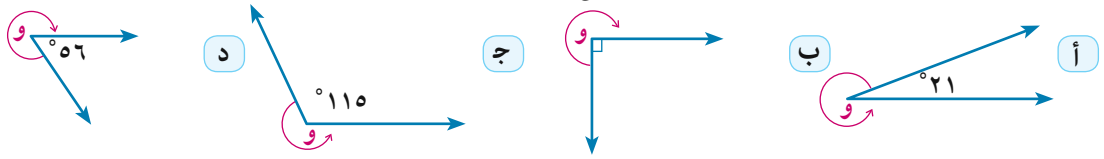
ب اتجاه الزاوية θ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة — ق(∠θ) = ٣٦٠° − ٣٣° = ٣٢٧°

جـ اتجاه الزاوية θ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة — ق(∠θ) = ٣٦٠° − ١٢٥° = ٢٣٥°

د اتجاه الزاوية θ هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة — ق(∠θ) = − (٣٦٠° − ١٣٤°) = − ٢٢٦°

حاول أن تحل

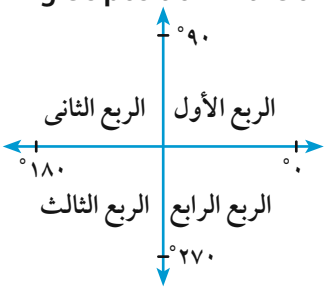
(٢) أوجد قياس الزاوية الموجهة (و) المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية:



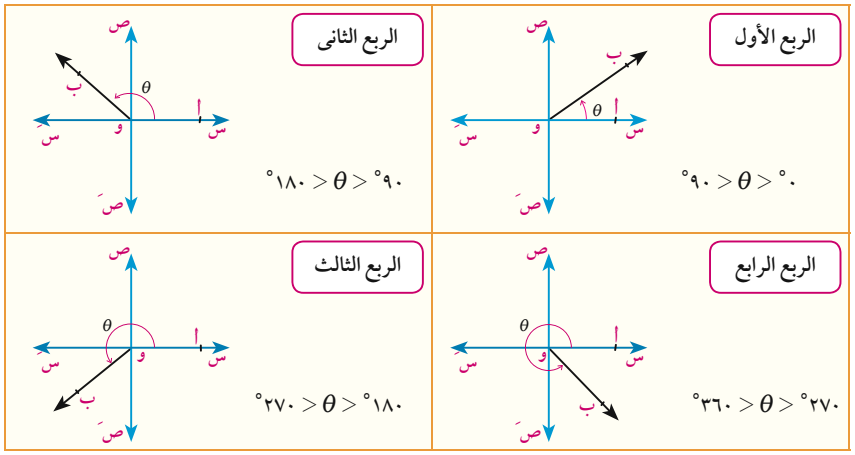
موقع الزاوية فى المستوى الإحداثى المتعامد:

Angle's position in the orthogonal coordinate plane

- يقسم المستوى الإحداثى المتعامد إلى أربعة أرباع كما فى الشكل المقابل.



➤ إذا كانت ∠ أ و ب الموجهة في الوضع القياسي والتي قياسها الموجب هو (θ) فإن ضلعها النهائي $\overleftarrow{و ب}$ يمكن أن يقع في أحد الأرباع:



➤ إذا وقع الضلع النهائى $\overleftarrow{و ب}$ على أحد محورى الإحداثيات تسمى الزاوية فى هذه الحالة **بالزاوية الربعية** (Quadrantal angle)، فتكون الزوايا التى قياساتها ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° هى زوايا ربعية.

مثال

(٢) عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

أ ٤٨° ب ٢١٧° ج ١٣٥° د ٢٩٥° هـ ٢٧٠°

الحل

أ $0° < 48° < 90°$ فهى تقع فى الربع الأول.

ب $180° > 217° > 270°$ فهى تقع فى الربع الثالث.

ج $90° < 135° < 180°$ فهى تقع فى الربع الثانى.

د $270° < 295° < 360°$ فهى تقع فى الربع الرابع.

هـ ٢٧٠° زاوية ربعية.

حاول أن تحل

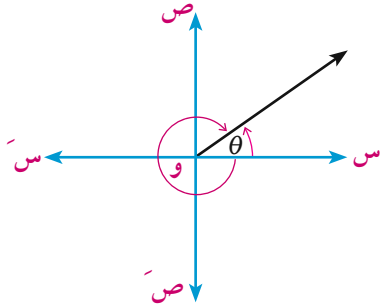
(٣) عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

أ ٨٨° ب ١٥٢° ج ١٨٠° د ٣٠٠° هـ ١٩٦°

ملاحظة:

➤ إذا كان $(\theta°)$ هو القياس الموجب لزاوية موجهة فإن القياس السالب لها يساوي $(\theta° - 360°)$

➤ وإذا كان $(-\theta°)$ هو القياس السالب لزاوية موجهة فإن القياس الموجب لها يساوي $(-\theta° + 360°)$



مثال

(٣) عين القياس السالب لزاوية قياسها ٢٧٥°.

الحل

القياس السالب للزاوية (٢٧٥°) = ٢٧٥° − ٣٦٠° = −٨٥°

التحقيق: |٢٧٥°| + |−٨٥°| = ٢٧٥° + ٨٥° = ٣٦٠°

أضف إلى معلوماتك

مجموع القيمة المطلقة لكل من القياسين الموجب والسالب للزاوية الموجهة يساوى ٣٦٠°

حاول أن تحل

(٤) عين القياس السالب للزاويا التي قياساتها كالآتى:

أ ٣٢° ب ٢٧٠° ج ٢١٠° د ٣١٥°

مثال

(٤) عين القياس الموجب للزاوية −٢٣٥°

الحل

القياس الموجب للزاوية (−٢٣٥°) = ٣٦٠° − ٢٣٥° = ١٢٥°

التحقيق: |−٢٣٥°| + |١٢٥°| = ٢٣٥° + ١٢٥° = ٣٦٠°

حاول أن تحل

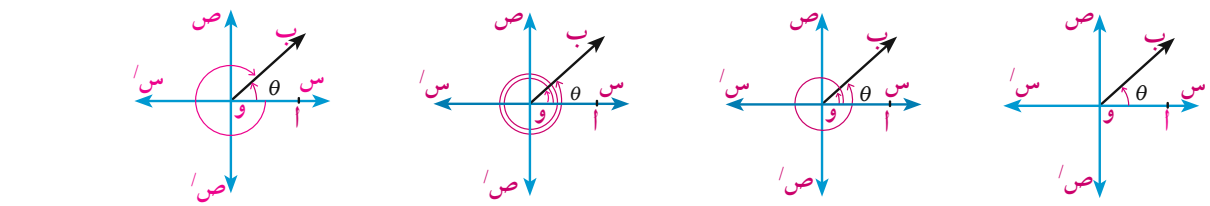
(٥) عين القياس الموجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ −٥٢° ب −١٢٦° ج −٩٠° د −٣٢٠°

(٦) **الربط بالرياضة:** يدور أحد لاعبى القرص بزاوية قياسها ١٥٠° ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسى.

الزوايا المتكافئة Equivalent angles

تأمل الأشكال الآتية وحدد الزاوية الموجهة (θ) فى الوضع القياسى لكل شكل. ماذا تلاحظ؟



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

فى الأشكال (٢)، (٣)، (٤) نلاحظ أن الزاوية (θ) والزاوية المرسومة معها لهما نفس الضلع النهائى $\overleftarrow{و ب}$.

شكل (١): الزاوية التى قياسها θ فى الوضع القياسى.

شكل (٢): الزاويتان θ ، $\theta + ٣٦٠°$ متكافئتان.

شكل (٣): الزاويتان θ ، $\theta + ٢ \times ٣٦٠°$ متكافئتان.

شكل (٤): الزاويتان θ ، $-(٣٦٠° - \theta) = \theta - ٣٦٠°$ متكافئتان

مما سبق نستنتج أن:

عند رسم زاوية موجهة θ فى الوضع القياسى فإن جميع الزوايا التى قياساتها:

$\theta \pm ١ \times ٣٦٠^\circ$ أو $\theta \pm ٢ \times ٣٦٠^\circ$ أو $\theta \pm ٣ \times ٣٦٠^\circ$ أو..... أو $\theta \pm$ ن $\times ٣٦٠^\circ$ حيث ن $\in$ صـ

يكون لها نفس الضلع النهائى، وتسمى **زوايا متكافئة**.

مثال

(٥) أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزاويتين الآتيتين:

أ ١٢٠° ب -٢٣٠°

الحل

أ زاوية بقياس موجب: $١٢٠^\circ + ٣٦٠^\circ = ٤٨٠^\circ$ (بإضافة ٣٦٠°)

زاوية بقياس سالب: $١٢٠^\circ - ٣٦٠^\circ = -٢٤٠^\circ$ (بطرح ٣٦٠°)

ب زاوية بقياس موجب: $-٢٣٠^\circ + ٣٦٠^\circ = ١٣٠^\circ$ (بإضافة ٣٦٠°)

زاوية بقياس سالب: $-٢٣٠^\circ - ٣٦٠^\circ = -٥٩٠^\circ$ (بطرح ٣٦٠°)

فكر: هل توجد زوايا أخرى بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب؟ اذكر بعض هذه الزوايا إن وجدت.

حاول أن تحل

(٧) أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا الآتية:

أ ٤٠° ب ١٥٠° ج -١٢٥° د -٢٤٠° هـ -١٨٠°

(٨) **اكتشف الخطأ:** جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية ٧٥° في الوضع القياسى ما عدا الإجابة:

أ -٢٨٥° ب -٦٤٥° ج ٢٨٥° د ٤٣٥°

تحقق من فهمك

(١) عين الربع الذى تقع فيه كل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتى:

أ ٥٦° ب ٣٢٥° ج ٥٧٠° د ١٦٦° هـ ٣٩٠°

(٢) عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التى قياساتها كالآتى:

أ ٤٣° ب ٢١٤° ج ١٢٥° د ٩٠° هـ ٣١٢°

(٣) عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ -٥٦° ب -٢١٥° ج ٤٩٥° د ٩٣٠° هـ -٤٥٠°

وحدات قياس الزاوية

Systems of Measuring Angle

٤ - ٢

سوف تتعلم

- مفهوم القياس الدائرى للزاوية.
- العلاقة بين القياس الستينى والقياس الدائرى.
- كيفية إيجاد طول قوس في دائرة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- قياس ستينى Degree Measure
- قياس دائرى Radian Measure
- زاوية نصف قطرية Radian Angle

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

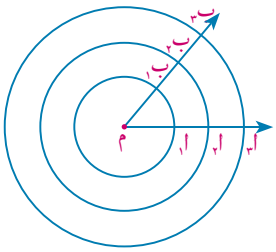
فكر و ناقش

سبق أن علمت أن القياس الستينى ينقسم إلى درجات ودقائق وثوان، وأن الدرجة الواحدة = ٦٠ دقيقة، وأن الدقيقة الواحدة = ٦٠ ثانية.

هل توجد قياسات أخرى للزاوية؟

القياس الدائرى Radian Measure

عمل تعاونى



١- ارسم مجموعة من الدوائر المتحدة المركز كما فى الشكل المقابل.

٢- أوجد النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة – ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية، وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوى مقدارًا ثابتًا.

أى أن: $\frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_1 ب_1}}{\text{م } أ_1} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_2 ب_2}}{\text{م } أ_2} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_3 ب_3}}{\text{م } أ_3}$ = مقدار ثابت.

وهذا المقدار الثابت هو القياس الدائرى للزاوية.

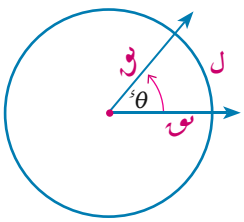
القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

ويرمز لها بالرمز (θ^c)

تعريف

إذا كان θ^c هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها ق، تقابل قوسًا من الدائرة طوله ل فإن:

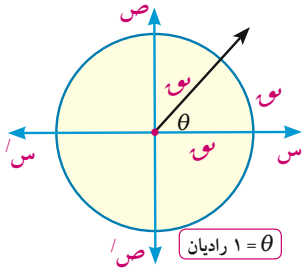
طول القوس يساوى حاصل ضرب قياس الزاوية المركزية فى طول نصف قطر الدائرة.



$$ل = \theta^c \times ق$$

تفكير ناقد: هل قياس الزاوية المركزية لدائرة يتناسب مع طول القوس المقابل لها؟ فسِّر إجابتك.

ووحدة قياس الزواية فى القياس الدائري هي الزاوية النصف قطرية، ويرمز لها بالرمز (ᶜ١) ويقرأ واحد راديان.



تعريف

الزاوية النصف قطرية Radian angle

هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

مثال

(٤) دائرة طول نصف قطرها ٨ سم . أوجد لأقرب رقمين عشرين طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التى تقابله يساوى $\frac{\pi ٥}{١٢}$

الحل

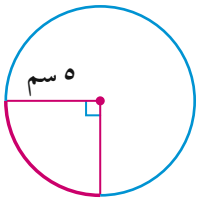
نستخدم صيغة طول القوس: ل = $\theta^{ᶜ}$ × ق

بالتعويض عن ق = ٨ سم ، $\theta^{ᶜ} = \frac{\pi ٥}{١٢}$ فيكون: ل = $\frac{\pi ٥}{١٢} \times ٨$ ∴ ل ≃ ١٠,٤٧سم

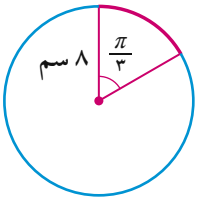
حاول أن تحل

(١) أوجد طول القوس الذى يحصر الزاوية المعلومة فى كل من الدوائر الآتية مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة .

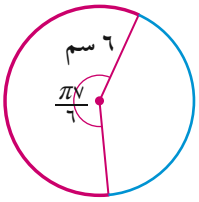
أ



ب



ج



العلاقة بين القياس الستينى والقياس الدائرى:

Relation between degree measure and radian measure

تعلم أن: قياس الزاوية المركزية لدائرة يساوى قياس قوسها.

أى أن: الزاوية المركزية التى قياسها الستينى ٣٦٠° يكون طول قوسها ٢ π ق

وفى دائرة الوحدة

فإن: ٢π (راديان) **بالتقدير الدائرى** يكافئ ٣٦٠° **بالتقدير الستينى**.

أى أن: π (راديان) يكافئ ١٨٠° ᶜ١ (راديان) = $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$ ≃ ٥٧° ١٧′ ٤٥″

إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائرى $\theta^{ᶜ}$ وقياسها الستينى س° فإن:

$$\frac{\theta^{ᶜ}}{\pi} = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ}$$

أضف إلى معلوماتك

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى الوحدة فإن الدائرة تسمى دائرة الوحدة.

أضف إلى معلوماتك

توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهى الجراد (Grad) وتساوى $\frac{١}{٢٠٠}$ من قياس الزاوية المستقيمة.

إذا كانت س، θ، ص هى قياسات ثلاث زوايا على التوالى بوحدات الدرجة، والراديان، والجراد فإن:

$$\frac{\text{س}^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{\theta^c}{\pi} = \frac{\text{ص}^g}{٢٠٠}$$

مثال

٥ حول ٣٠° إلى قياس دائرى بدلالة π.

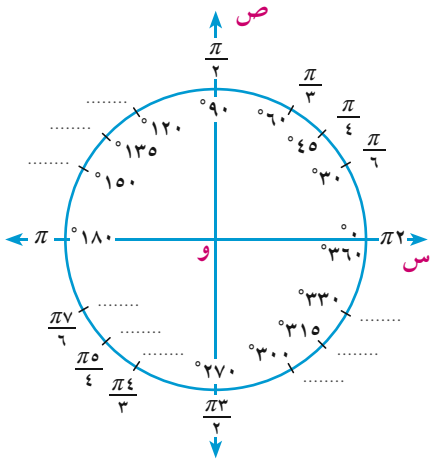
الحل

للتحويل إلى راديان نستخدم الصورة $\frac{\theta^c}{\pi} = \frac{\text{س}^\circ}{١٨٠^\circ}$

$$\theta^c = \frac{٣٠^\circ \times \pi}{١٨٠^\circ} = \frac{\pi}{٦}$$

حاول أن تحل

٢ الشكل المقابل يمثل قياسات بعض الزوايا الخاصة أحدها كُتب بالراديان (خارج الدائرة) والآخر كتب بالدرجات (داخل الدائرة). اكتب قياسات زوايا الشكل المقابلة أمام كل قياس زاوية مناظرة لها.



مثال

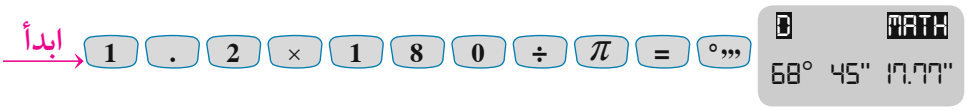
٦ حول قياس الزاوية ١,٢ ᶜ إلى قياس ستينى.

الحل

$$\text{س}^\circ = \frac{١,٢ \times ١٨٠^\circ}{\pi}$$

$$\text{س}^\circ = ٦٨,٧٥٤٩٣٥٤٢ = ٦٨^\circ ٤٥' ١٨''$$

وتستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالى:



حاول أن تحل

٣ حول قياسات الزوايا التالية إلى قياس سيتينى مقربًا الناتج لأقرب ثانية:

أ ٠,٧ ᶜ ب ١,٦ ᶜ ج ٢,٠٥ ᶜ د −١,٠٥ ᶜ

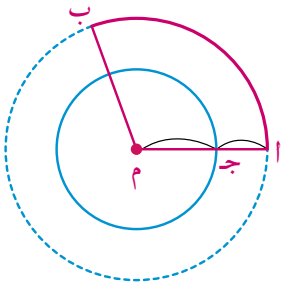
مثال

٧ **الربط بالفضاء:** قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٣ ساعات، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريبًا ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم. فأوجد المسافة التى يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقربًا الناتج لأقرب كيلومتر.



الحل

يبين الشكل المقابل المسار الدائرى لحركة القمر:



∵ طول نصف قطر دائرة مسار القمر م ا = م جـ + جـ ا

∴ م ا = ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١٠٠٠٠ كم

∵ القمر يقطع المسار الدائرى (دورة كاملة) فى ٣ ساعات، وهذا يقابل زاوية مركزية = 2π

∴ القمر يقطع قوسًا طوله $\frac{1}{3}$ محيط الدائرة فى الساعة الواحدة، وهذا يقابل زاوية مركزية = $\frac{2\pi}{3}$

نستخدم صيغة طول القوس: ل = $\theta^c \times$ نق

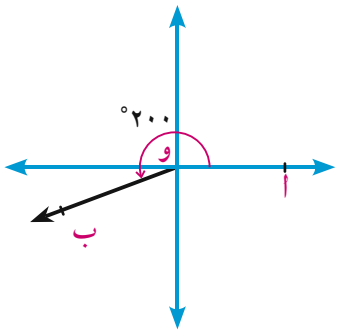
بالتعويض عن نق = ١٠٠٠٠ كم، $\theta^c = \frac{2\pi}{3}$: ل = $\frac{2\pi}{3} \times 10000$

ل ≃ ٢٠٩٤٤ كم

(٨) **ألعاب رياضية:** يدور أحد لاعبى الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠°. ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى وأوجد قياسها بالتقدير الدائرى.

الحل

ارسم محورين لإنشاء مستوى إحداثى متعامد ومتقاطعين في النقطة و.



بفرض أن اللاعب يدور بزاوية موجهة ا و ب حيث:

∠ (ا و ب) = ($\overrightarrow{و ا}$ ، $\overleftarrow{و ب}$) فيكون ق (∠ ا و ب) = ٢٠٠°.

∵ ١٨٠° < ٢٠٠° < ٢٧٠°

∴ الضلع النهائى للزاوية يقع في الربع الثالث.

٢٠٠° = $\frac{\pi \times 200}{180}$ ≃ ٣,٤٩ ᶜ

حاول أن تحل

(٤) **الربط بالرياضة:** لاعب اسكواش تحرك فى مسار على شكل قوس طول نصف قطر دائرته ١,٤ متر وزاوية دوران اللاعب ٨٠° أوجد لأقرب جزء من عشرة طول هذا القوس.

تحقق من فهمك

(١) **الصناعة:** يدور قرص آلة بزاوية قياسها – ٣١٥° ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى.

الدوال المثلثية

Trigonometric Functions

٤ - ٣

سوف تتعلم

- دائرة الوحدة.
- الدوال المثلثية الأساسية.
- مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية.
- إشارات الدوال المثلثية.
- الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة مثلثية Trigonometric Function
- جيب Sine
- جيب تمام Cosine
- ظل Tangent
- قاطع تمام Cosecant
- قاطع Secant
- ظل تمام Cotangent

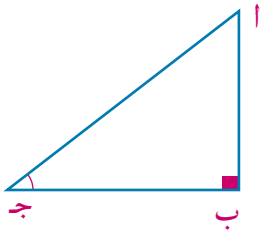
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

سبق أن درست النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.

وفى $\triangle$ أ ب جـ القائم الزاوية في ب نجد:

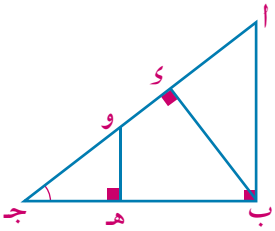


$$\text{جا جـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{ظا جـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$$

١- في الشكل المقابل عبر عن جا جـ بثلاث نسب مختلفة.



★ هل تتساوى هذه النسب؟ فسر إجابتك.

★ ماذا تستنتج؟

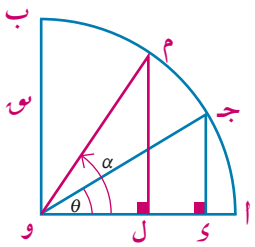
لاحظ أن:

المثلثات ب أ جـ ، هـ و جـ ، ء ب جـ متشابهه (لماذا)؟

ومن التشابه يكون: $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ب جـ}}$ = جا جـ لماذا؟

أى أن: النسبة المثلثية للزاوية الحادة نسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغيرت الزاوية نفسها.

٢- يبين الشكل المقابل ربع دائرة طول نصف قطرها ق سم



حيث: ق ($\angle$ ء و جـ) = θ

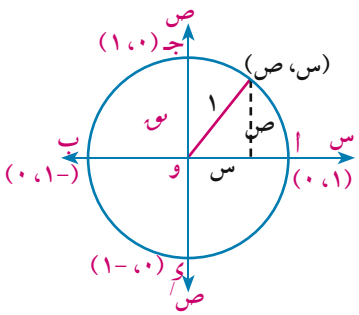
$$\text{جا } \theta = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ق}}$$

وعندما يزداد ق ($\angle$ ء و جـ) إلى α

فإن $\text{جا } \alpha = \frac{\text{م ل}}{\text{ق}}$

أى أن النسبة المثلثية لزاوية تتغير بتغير قياس زاويتها، وهذا ما يعرف بالدوال المثلثية.

دائرة الوحدة The unit circle



فى أى نظام إحداثى متعامد تسمى الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى وحدة الأطوال بدائرة الوحدة.

★ دائرة الوحدة تقطع محور السينات في النقطتين أ (١، ٠)، ب (-١، ٠)، وتقطع محور الصادات في النقطتين جـ (٠، ١)، د (٠، -١).

★ إذا كان (س، ص) هما إحداثيا أى نقطة على دائرة الوحدة فإن:

س ∈ [-١، ١] ، ص ∈ [-١، ١].

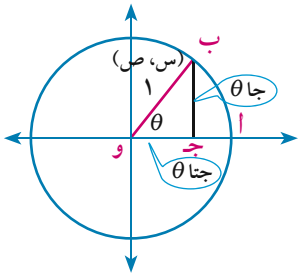
حيث $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ نظرية فيثاغورث

الدوال المثلثية الأساسية للزاوية The basic trigonometric functions of an angle

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص) وقياسها θ يمكن تعريف الدوال الآتية:

١- جيب تمام الزاوية θ = الإحداثى السينى للنقطة ب

أى أن: جتا θ = س



٢- جيب الزاوية θ = الإحداثى الصادى للنقطة ب

أى أن: جا θ = ص

٣- ظل الزاوية θ = $\frac{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$

أى أن: ظا $\theta = \frac{ص}{س}$ حيث س ≠ ٠ ، ظا $\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ حيث جتا $\theta \neq ٠$

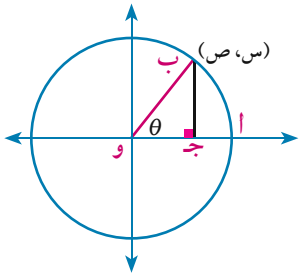
لاحظ أن: يكتب الزوج المرتب (س، ص) لأى نقطة على دائرة الوحدة بالصورة (جتا θ، جا θ)

إذا كانت النقطة جـ $\left(\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥}\right)$ هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهه قياسها θ مع دائرة الوحدة

فإن: جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$ ، جا $\theta = \frac{٤}{٥}$ ، ظا $\theta = \frac{٤}{٣}$

مقلوبات الدوال الأساسية The reciprocals of the basic trigonmetric functions

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب(س، ص) وقياسها θ توجد الدوال الآتية:



١- قاطع الزاوية θ: قا $\theta = \frac{١}{س} = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ حيث س ≠ ٠

٢- قاطع تمام الزاوية θ: قتا $\theta = \frac{١}{ص} = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$ حيث ص ≠ ٠

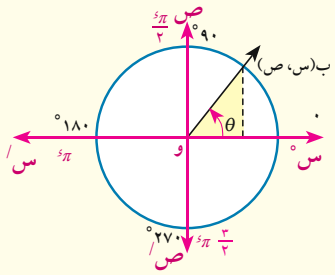
٣- ظل تمام الزاوية θ: ظتا $\theta = \frac{س}{ص} = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$ حيث ص ≠ ٠

إشارات الدوال المثلثية
The signs of The Trigonometric Functions

الربع الأول

س > ٠

ص > ٠



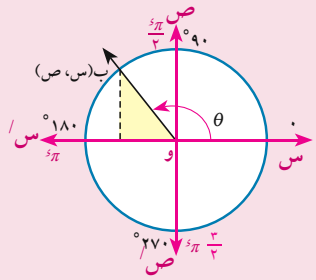
الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الأول.

لذلك كل الدوال المثلثية للزاوية التى ضلعها النهائى $\overleftarrow{وب}$ تكون موجبة

الربع الثانى

س < ٠

ص > ٠



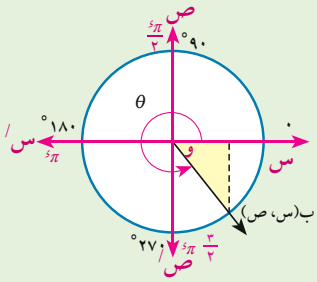
الضلع النهائى يقع فى الربع الثانى

لذلك دالة الجيب ومقلوبها تكونان موجبتين وباقى الدوال سالبة.

الربع الرابع

س > ٠

ص < ٠



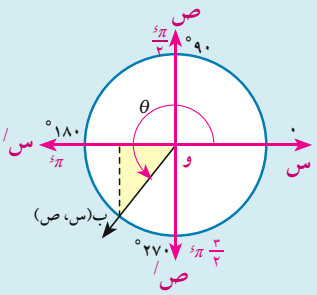
الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الرابع

لذلك دالة جيب التمام ومقلوبها تكونان موجبتين، وباقى الدوال سالبة.

الربع الثالث

س < ٠

ص < ٠

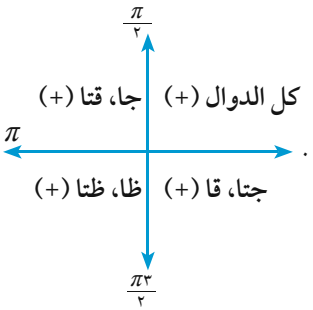


الضلع النهائى للزاوية يقع فى الربع الثالث

لذلك دالة الظل ومقلوبها تكونان موجبتين، وباقى الدوال سالبة.

ويمكن تلخيص إشارات الدوال المثلثية جميعها فى الجدول الآتى:

الربع الذى يقع فيه الضلع النهائى للزاوية	الفترة التى يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية		
		جا، قتا	جتا، قا	ظا، ظتا
الأول	$]0 ، \frac{\pi}{2}[$	+	+	+
الثانى	$]\frac{\pi}{2} ، \pi[$	+	−	−
الثالث	$]\pi ، \frac{\pi 3}{2}[$	−	−	+
الرابع	$]\frac{\pi 3}{2} ، \pi 2[$	−	+	−



مثال

(١) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

(أ) جا ١٣٠° (ب) ظا ٣١٥° (جـ) جتا ٦٥٠° (د) قا (−٣٠°)

الحل

(أ) الزاوية التى قياسها ١٣٠° تقع فى الربع الثانى ∴ جا ١٣٠° موجبة

ب الزاوية التى قياسها ٣١٥° تقع في الربع الرابع ∴ ظا ٣١٥° سالبة

ج الزاوية التى قياسها ٦٥٠° تكافىء زاوية قياسها ٦٥٠° − ٣٦٠° = ٢٩٠°

∴ الزاوية التى قياسها ٦٥٠° تقع في الربع الرابع ∴ جتا ٦٥٠° موجبة.

د الزاوية التى قياسها (−٣٠°) تكافئ زاوية قياسها − ٣٠° + ٣٦٠° = ٣٣٠°

الزاوية التى قياسها (−٣٠°) تقع في الربع الرابع ∴ قا (−٣٠°) موجبة.

حاول أن تحل

(١) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

أ جتا ٢١٠° ب جا ٧٤٠° ج ظا −٣٠٠° د جا ١٢٣٠°

مثال

(٢) إذا كانت ∠ أ و ب فى وضعها القياسي فى دائرة الوحدة. أوجد الدوال المثلثية الأساسية للزاوية أ و ب إذا كان إحداثيات نقطة ب هى:

أ (٠، −١) ب $(\frac{١}{\sqrt{٢}}$، ص) ج (−س، س)

حيث س > ٠ ، ص < ٠

الحل

أ جتا أوب = ٠ ، جا أوب = −١ ، ظا أوب = $\frac{-١}{٠}$ (غير معرف)

ب س^{٢} + ص^{٢} = ١ (دائرة الوحدة) ، بالتعويض عن س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$(\frac{١}{\sqrt{٢}})^{٢}$ + ص^{٢} = ١ فيكون ص^{٢} = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ > ٠ ، ص = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ > ٠ (مرفوض)

∴ جتا أوب = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا أوب = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا أوب = ١

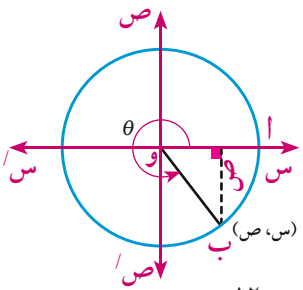
ج (−س)^{٢} + (س)^{٢} = ١ ∴ ٢س^{٢} = ١ ∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ لأن س < ٠

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ص = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ويكون: جتا أوب = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا أوب = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا وأب = −١

(٣) إذا كانت ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° وكان جا θ = − $\frac{٥}{١٣}$ أوجد جميع الدوال المثلثية الأساسية للزاوية θ

الحل



نفرض أن قه (∠ أ و ب) = θ حيث θ فى الربع الرابع

وأن إحداثيى النقطة ب هما (س، ص)

∵ ص = جا θ = − $\frac{٥}{١٣}$ ، س = جتا θ حيث جتا θ > ٠

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١ ∴ جتا^{٢} θ + $(\frac{-٥}{١٣})^{٢}$ = ١

∴ جتا^{٢} θ = ١ − $\frac{٢٥}{١٦٩}$ ∴ جتا^{٢} θ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ جتا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ أو جتا θ = − $\frac{١٢}{١٣}$

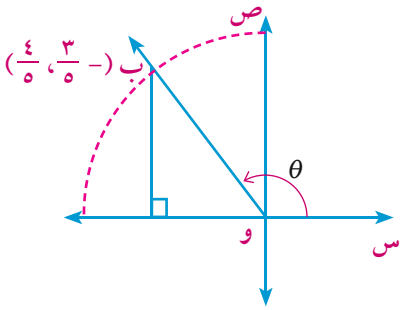
جتا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ (لماذا)؟ طا θ = − $\frac{١٢}{٥}$

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت ٩٠° < θ < ١٨٠°، جا θ = $\frac{٤}{٥}$ أوجد جتا θ، ظا θ حيث θ زاوية في وضعها القياسى في دائرة الوحدة.

مثال

(٤) إذا كانت الزاوية θ المرسومة فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة ب $(-\frac{٣}{٥}، \frac{٤}{٥})$.
فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ.



الحل

جا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا θ = $\frac{-٣}{٥} = -\frac{٣}{٥}$ ، ظا θ = $\frac{٤}{-٣} = -\frac{٤}{٣}$

قتا θ = $\frac{٥}{٤}$ ، قا θ = $\frac{٥}{-٣} = -\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{-٣}{٤} = -\frac{٣}{٤}$

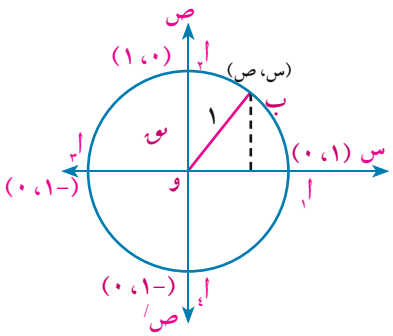
حاول أن تحل

(٣) أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ المرسومة فى الوضع القياسى، والتى يمر ضلعها النهائى بالنقاط الآتية:

أ $(\frac{١٢}{١٣}، \frac{٥}{١٣})$ ب $(-\frac{٤}{٥}، -\frac{٣}{٥})$ ج $(\frac{٥}{١٣}، -\frac{١٢}{١٣})$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

The trigonometric functions of some special angles



في الشكل المقابل: قطعت دائرة الوحدة محورى الإحداثيات في النقاط أ١(١، ٠)، أ٢(٠، ١)، أ٣(-١، ٠)، أ٤(٠، -١).
وكانت θ قياس الزاوية الموجهة أ و ب في وضعها القياسى، والذى يقطع ضلعها النهائى $\overleftarrow{و ب}$ دائرة الوحدة في ب.

أولًا: إذا كانت θ = ٠° أو θ = ٣٦٠° **فإن:** ب(١، ٠)

ويكون: جتا ٠° = جتا ٣٦٠° = ١ ، جا ٠° = جتا ٣٦٠° = صفر،

ظا ٠° = ظا ٣٦٠° = صفر

ثانيًا: إذا كانت θ = ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$ **فإن:** ب(٠، ١)

جتا ٩٠° = صفر ، جا ٩٠° = ١ ، ظا = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

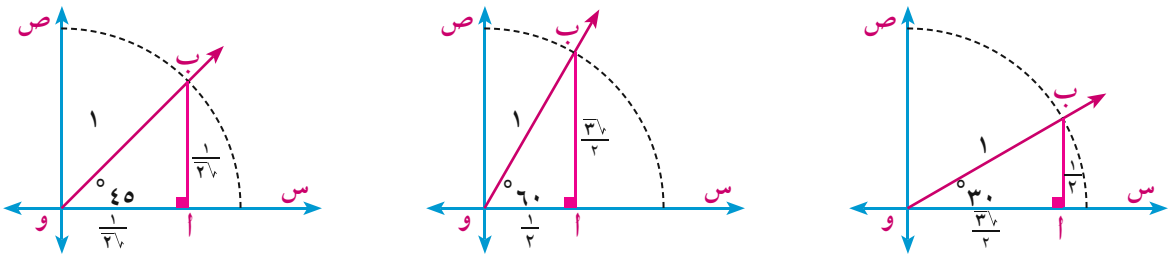
ثالثًا: إذا كانت θ = ١٨٠° = π **فإن:** ب(-١، ٠)

جتا ١٨٠° = -١ ، جا ١٨٠° = صفر ، ظا ١٨٠° = صفر

رابعًا: إذا كانت $\theta = ٢٧٠^\circ = \frac{٣\pi}{٢}$ **فإن:** ب$(٠، -١)$

جتا $٢٧٠^\circ = ٠$ ، جا $٢٧٠^\circ = -١$ ، ظا $٢٧٠^\circ = \frac{-١}{\text{صفر}}$ (غير معرف)

في الأشكال التالية حدد إحداثيي النقطة ب لكل شكل واستنتج الدوال المثلثية لقياسات الزوايا $٣٠^\circ، ٦٠^\circ، ٤٥^\circ$



مثال

٥ أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن: جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا$^٢ \frac{\pi}{٣}$

الحل

تعلم أن جا $٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$ ، جتا $٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا $٦٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا $٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$

∴ الطرف الأيمن $= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$ (١)

∵ $\frac{\pi}{٤} = ٤٥^\circ$ ، جا $٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

الطرف الأيسر = جا$^٢ \frac{\pi}{٤}$ = جا$^٢ ٤٥^\circ = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^٢ = \frac{١}{٢}$ (٢)

من (١)، (٢) ∴ الطرفان متساويان.

حاول أن تحل

٤ أوجد قيمة: ٣ جا ٣٠° جا$^٢ ٦٠^\circ$ − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا$^٢ ٤٥^\circ$

٥ **تفكير ناقد:** إذا كانت الزاوية θ مرسومة في الوضع القياسي، وكان جتا $\theta = \frac{-١}{٢}$ ، جا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

هل من الممكن أن يكون ق$(\angle\theta) = ٢٤٠^\circ$؟ وضح ذلك.

تحقق من فهمك

أثبت صحة كلٍّ من المتساويات التالية:

أ ١ − ٢جا$^٢ ٩٠^\circ$ = جتا ١٨٠°

ب جتا$^٢ \frac{\pi}{٢}$ = جتا$^٢ \frac{\pi}{٤}$ − جا$^٢ \frac{\pi}{٤}$

العلاقات بين الدوال المثلثية

Relations between Trigonometric Functions

٤ - ٤

سوف تتعلم

- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $\theta \pm ١٨٠^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $-\theta ٣٦٠^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $\theta \pm ٩٠^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين θ، $\theta \pm ٢٧٠^\circ$
- الحل العام للمعادلات المثلثية التى على الصورة:
 - جا α = جتا β
 - قا α = قتا β
 - طا α = ظتا β

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- زاويتان متنسبتان Related Angles

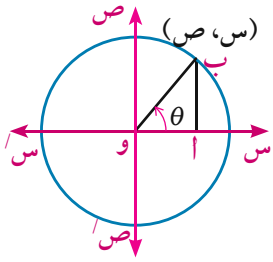
الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

سبق أن درست الانعكاس وتعرفت على خواصه .

يبين الشكل المقابل الزاوية الموجهة أ و ب في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص). قياسها θ حيث $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$



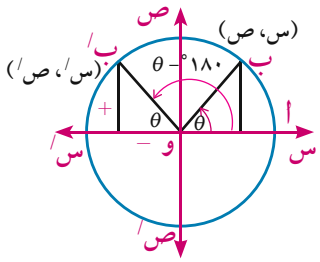
عيِّن النقطة ب/ صورة النقطة ب بالانعكاس حول محور الصادات، واذكر إحداثيها.

ما قياس ∠ أ و ب/؟ هل ∠ أ و ب/ في الوضع القياسى؟

١ - الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta - ١٨٠^\circ)$

من الشكل المقابل ب/ (س/، ص/) صورة النقطة ب(س،ص) بالانعكاس حول محور الصادات

فيكون س/ = −س ، ص/ = −ص



لذلك فإن:

جا $(\theta - ١٨٠^\circ)$ = جا θ ، قتا $(\theta - ١٨٠^\circ)$ = قتا θ

جتا $(\theta - ١٨٠^\circ)$ = − جتا θ ، قا $(\theta - ١٨٠^\circ)$ = − قا θ

ظا $(\theta - ١٨٠^\circ)$ = − ظا θ ، ظتا $(\theta - ١٨٠^\circ)$ = − ظتا θ

فمثلًا: جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

جا ١٣٥° = جا (١٨٠° − ٤٥°) = جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

حاول أن تحل

(١) أوجد ظا ١٣٥° ، جا ١٢٠° ، جتا ١٥٠°

لاحظ أن: $\theta + (\theta - ١٨٠^\circ) = ١٨٠^\circ$

يقال إن الزاويتين θ ، $\theta - ١٨٠^\circ$ **زاويتان متنسبتان.**

تعريف

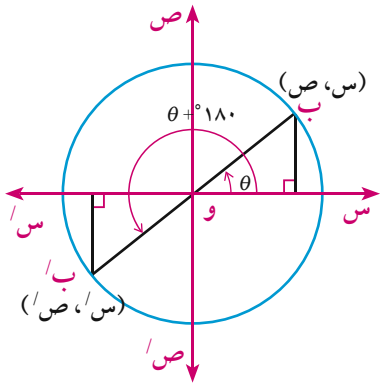
الزاويتان المتنسبتان: هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوى عددًا صحيح من القوائم.

٢- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta + ١٨٠^\circ)$

في الشكل المقابل نجد:

ب/(س/، ص/) صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس فى نقطة الأصل و فيكون س/ = −س، ص/ = −ص

لذلك فإن:



جا $(\theta + ١٨٠^\circ)$ = − جا θ ، قتا $(\theta + ١٨٠^\circ)$ = − قتا θ	
جتا $(\theta + ١٨٠^\circ)$ = − جتا θ ، قا $(\theta + ١٨٠^\circ)$ = − قا θ	
ظا $(\theta + ١٨٠^\circ)$ = ظا θ ، ظتا $(\theta + ١٨٠^\circ)$ = ظتا θ	

فمثلًا:

جا ٢١٠° = جا $(١٨٠^\circ + ٣٠^\circ)$ = − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

جتا ٢٢٥° = جتا $(١٨٠^\circ + ٤٥^\circ)$ = − جتا ٤٥° = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٢٤٠° = ظا $(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ)$ = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

حاول أن تحل

(٢) أوجد جا ٢٢٥° ، جتا ٢١٠° ، قا ٦٠٠° ، ظتا ٢٢٥°.

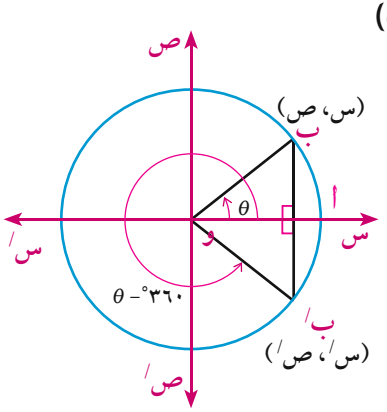
٣- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta - ٣٦٠^\circ)$

في الشكل المقابل:

ب/(س/، ص/) صورة النقطة ب(س، ص)

بالانعكاس حول محور السينات فيكون س/ = س ، ص/ = −ص

لذلك فإن:



جا $(\theta - ٣٦٠^\circ)$ = − جا θ ، قتا $(\theta - ٣٦٠^\circ)$ = − قتا θ	
جتا $(\theta - ٣٦٠^\circ)$ = جتا θ ، قا $(\theta - ٣٦٠^\circ)$ = قا θ	
ظا $(\theta - ٣٦٠^\circ)$ = − ظا θ ، ظتا $(\theta - ٣٦٠^\circ)$ = − ظتا θ	

فمثلًا:

جا ٣٣٠° = جا $(٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ)$ = − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

جتا ٣١٥° = جتا $(٣٦٠^\circ - ٤٥^\circ)$ = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

لاحظ أن

الدوال المثلثية للزاوية $(-\theta)$ هى نفسها الدوال المثلثية للزاوية $(\theta - ٣٦٠^\circ)$

حاول أن تحل

(٣) أوجد: جا ٣١٥° ، قتا ٣١٥° ، ظا ٣٣٠° ، ظا ٣٠٠°

تفكير ناقد: كيف يمكنك إيجاد جا (-٤٥°) ، جتا (-٦٠°) ، ظا(-٣٠°) ، جا ٦٩٠°.

مثال

(١) بدون استخدام الآله الحاسبة أوجد قيمة المقدار

جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

الحل

جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا (−٣٠٠°) = جتا (−٣٠٠° + ٣٦٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

جتا ٩٣٠° = جتا (٩٣٠° − ٢ × ٣٦٠°) = جتا ٢١٠° = $\frac{١}{٢}$

وتكون جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠° + ٣٠°) = −جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظتا ٢٤٠° = ظتا (١٨٠° + ٦٠°) = ظتا ٦٠° = $\frac{١}{\text{ظا}٦٠°} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

المقدار = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) \times \frac{١}{\sqrt{٣}}$

= $\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

(٤) أثبت أن جا ٦٠٠° جتا (−٣٠°) + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠°) = −١

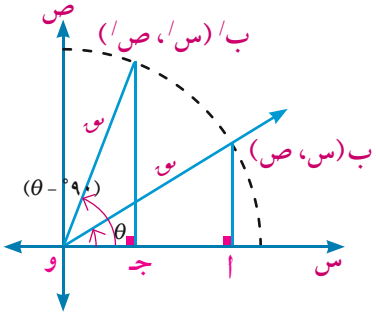
٤- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta - ٩٠°)$

يبين الشكل المجاور جزءًا من دائرة مركزها و.

الزاوية θ مرسومة فى الوضع القياسى لدائرة طول نصف قطرها و.

من تطابق المثلثين و أ ب ، و جـ ب/:

نجد أن: س/ = ص ، ص/ = س



لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(\theta - ٩٠°)$

جا $(\theta - ٩٠°)$ = جتا θ ، قتا $(\theta - ٩٠°)$ = قا θ

جتا $(\theta - ٩٠°)$ = جا θ ، قا $(\theta - ٩٠°)$ = قتا θ

ظا $(\theta - ٩٠°)$ = ظتا θ ، ظتا $(\theta - ٩٠°)$ = ظا θ

مثال

(١) إذا كانت الزاوية θ فى الوضع القياسى، ويمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$

فأوجد الدوال المثلثية: جا $(\theta - ٩٠°)$ ، ظتا $(\theta - ٩٠°)$

الحل

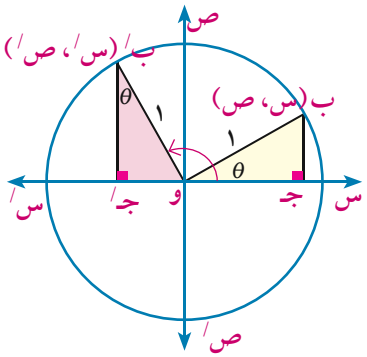
∵ جا $(\theta - ٩٠^\circ)$ = جتا θ ∴ جا $(\theta - ٩٠^\circ) = \frac{٣}{٥}$

∵ ظتا $(\theta - ٩٠^\circ)$ = ظا θ ∴ ظتا $(\theta - ٩٠^\circ) = \frac{٤}{٣}$

حاول أن تحل

(٥) فى المثال السابق أوجد جتا $(\theta - ٩٠^\circ)$ ، قتا $(\theta - ٩٠^\circ)$

٥- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta + ٩٠^\circ)$



من تطابق المثلثين ب/ جـ/ و ، و جـ ب

نجد أن ص/ = س ، س/ = −ص

ومن ذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(\theta + ٩٠^\circ)$ كالآتى:

جا $(\theta + ٩٠^\circ)$ = جتا θ ، قتا $(\theta + ٩٠^\circ)$ = قا θ

جتا $(\theta + ٩٠^\circ)$ = −جا θ ، قا $(\theta + ٩٠^\circ)$ = −قتا θ

ظا $(\theta + ٩٠^\circ)$ = −ظتا θ ، ظتا $(\theta + ٩٠^\circ)$ = −ظا θ

مثال

(٢) إذا كانت الزاوية θ فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{١}{٣}، \frac{\sqrt{٢}٢}{٣})$

أوجد الدوال المثلثية ظا $(\theta + ٩٠^\circ)$ ، قتا $(\theta + ٩٠^\circ)$

الحل

∵ ظا $(\theta + ٩٠^\circ)$ = − ظتا θ ∴ ظا $(\theta + ٩٠^\circ) = -\frac{١}{\frac{\sqrt{٢}٢}{٤}} = -\frac{\sqrt{٢}٤}{٢}$

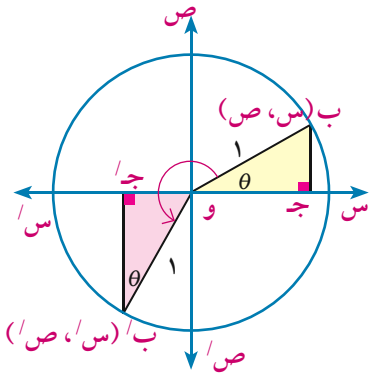
∵ قتا $(\theta + ٩٠^\circ)$ = قا θ ∴ قتا $(\theta + ٩٠^\circ) = ٣$

حاول أن تحل

(٦) فى المثال السابق أوجد: جا $(\theta + ٩٠^\circ)$ ، قا $(\theta + ٩٠^\circ)$

٦- الدوال المثلثية لأى لزاويتين قياسيهما θ ، $(\theta - ٢٧٠^\circ)$

من تطابق المثلثين ب/ جـ/ و ، و جـ ب



لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ، $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ كالآتى:

جا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ = − جتا θ ، قتا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ = − قا θ	
جتا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ = − جا θ ، قا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ = − قتا θ	
ظا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ = ظتا θ ، ظتا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ = ظا θ	

مثال

(٣) إذا كانت الزاوية θ المرسومة فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، \frac{١}{٢})$ فأوجد الدوال المثلثية: جتا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ ، ظتا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$

الحل

∵ جتا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ = − جا θ ∴ جتا $(\theta - ٢٧٠^\circ) = -\frac{٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$

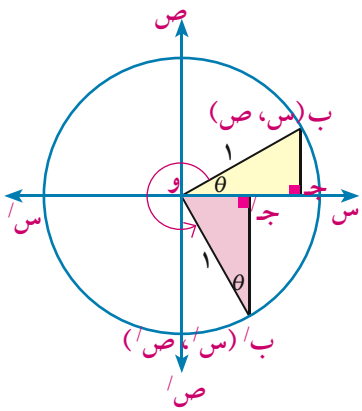
∵ ظتا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$ = ظا θ ∴ ظتا $(\theta - ٢٧٠^\circ) = \frac{٢}{\sqrt{٣}٢} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

حاول أن تحل

(٧) فى المثال السابق أوجد ظا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$، قتا $(\theta - ٢٧٠^\circ)$

٧- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما θ ، $(\theta + ٢٧٠^\circ)$

من تطابق المثلثين: ب/ جـ/ و، و جـ ب



لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين θ ، $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ كالآتى:

جا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ = − جتا θ ، قتا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ = − قا θ	
جتا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ = جا θ ، قا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ = قتا θ	
ظا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ = − ظتا θ ، ظتا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ = − ظا θ	

مثال

(٤) إذا كانت الزاوية θ فى الوضع القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة $(\frac{\sqrt{٥}}{٣}، \frac{٢}{٣})$ فأوجد الدوال المثلثية:
جا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ ، قا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$

الحل

∵ جا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ = − جتا θ ∴ جا $(\theta + ٢٧٠^\circ) = -\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

∵ قا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ = قتا θ ∴ قا $(\theta + ٢٧٠^\circ) = \frac{٣}{٢}$

حاول أن تحل

٨ فى المثال السابق أوجد ظتا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$ ، قتا $(\theta + ٢٧٠^\circ)$.

الحل العام للمعادلات المثلثية التى على الصورة: (جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β)

General solution of trigonometric equations as the form [tan(α) = cot(β), sec(α) = cscb(β), sin(α) = cos(β)]

فكر وناقش

سبق أن درست أنه إذا كان α، β هما قياسا زاويتين متتامتين (أى مجموع قياسيهما ٩٠°) فإن جا α = جتا β، قا α = قتا β، ظا α = ظتا β ومن ذلك فإن $\alpha + \beta = ٩٠^\circ$ حيث α، β زاويتان حادتان فإذا كانت جا θ = جتا ١٥° فما هى قيم زاوية θ المتوقعة؟

تعلم

١- إذا كان جا α = جتا β (حيث α، β قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

- جا α = جا $(\beta - \frac{\pi}{٢})$ ومن ذلك فإن: $\beta - \frac{\pi}{٢} = \alpha$ أى $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$
- جا α = جا $(\beta + \frac{\pi}{٢})$ ومن ذلك فإن: $\beta + \frac{\pi}{٢} = \alpha$ أى $\alpha - \beta = \frac{\pi}{٢}$

وبإضافة ٢πن (حيث ن ∈ صـ) إلى الزاوية $\frac{\pi}{٢}$ فإن:

عندما جا α = جتا β فإن $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ن	(حيث ن ∈ صـ)، بالمثل:
عندما قتا α = قا β فإن $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ن	(حيث ن ∈ صـ)، $\alpha \neq \pi$ن ، $\beta \neq \frac{\pi}{٢}(٢$ن $+ ١)$

٢- إذا كان ظا α = ظتا β (حيث α، β قياسا زاويتين متتامتين) فإن :

- ظا α = ظا $(\beta - \frac{\pi}{٢})$ ومن ذلك فإن: $\beta - \frac{\pi}{٢} = \alpha$ أى $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$
- ظا α = ظا $(\beta - \frac{\pi٣}{٢})$ ومن ذلك فإن: $\beta - \frac{\pi٣}{٢} = \alpha$ أى $\alpha + \beta = \frac{\pi٣}{٢}$

وبإضافة ٢πن (حيث ن ∈صـ) إلى الزاويتين $\frac{\pi}{٢}$، $\frac{\pi٣}{٢}$ فإن:

عندما ظا α = ظتا β فإن $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢} + \pi$ن	(حيث ن ∈ صـ)، $\alpha \neq \frac{\pi}{٢}(٢$ن $+ ١)$ ، $\beta \neq \pi$ن

مثال

(٥) حل المعادلة: جا ٢ θ = جتا θ

الحل

المعادلة: جا ٢ θ = جتا θ

$٢\theta = \pm\theta + ٢ن\pi + \frac{\pi}{٢}$ (ن ∈ صـ) **من تعريف المعادلة**

(١) أما $٢\theta = \theta + ٢ن\pi + \frac{\pi}{٢}$ أى أن: $٣\theta = ٢ن\pi + \frac{\pi}{٢}$

$\theta = ن\pi\frac{٢}{٣} + \frac{\pi}{٦}$ **بقسمة الطرفين على ٣**

(٢) أو $٢\theta = -\theta + ٢ن\pi + \frac{\pi}{٢}$ أى أن: $\theta = ٢ن\pi + \frac{\pi}{٢}$

حل المعادلة هو: $ن\pi\frac{٢}{٣} + \frac{\pi}{٦}$ أو $٢ن\pi + \frac{\pi}{٢}$

حاول أن تحل

(٩) أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ جا ٤ θ = جتا ٢ θ ب ٢جا$(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = ١ جـ جتاه θ = جا θ

(١٠) **اكتشف الخطأ:** فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزياد إيجاد قيمة جا$(\theta - \frac{\pi}{٢})$ فأيهما إجابته صحيحة؟ فسِّر ذلك.

إجابة كريم

جا $(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = جا $(\frac{\pi}{٢} - \theta + ٢\pi)$

= جا $(\theta + \frac{٣\pi}{٢})$

= − جتا θ

إجابة زياد

جا $(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = جا $[-(\frac{\pi}{٢} - \theta)]$

= −جا $(\theta - \frac{\pi}{٢})$

= − (− جتا θ) = جتا θ

تحقق من فهمك

أوجد جميع قيم θ حيث $\theta \in [٠، \frac{\pi}{٢}[$ والتى تحقق كل من المتساويات الآتية :

أ جا θ − جتا θ = ٠ ب قتا $(\theta - \frac{\pi}{٦})$ = قاθ جـ ٢جتا$(\theta - \frac{\pi}{٢})$ = ١

٤ - ٥

التمثيل البيانى للدوال المثلثية

Graphing Trigonometric Functions

سوف تتعلم

سوف تتعلم :

- رسم دالة الجيب واستنتاج خواصها.
- رسم دالة جيب التمام واستنتاج خواصها.

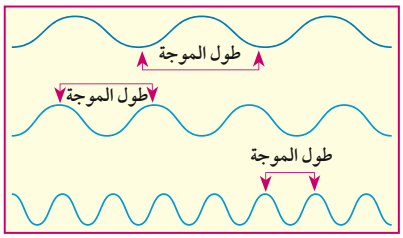
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة الجيب Sine Function
- دالة جيب التمام Cosine Function
- قيمة عظمى Maximum Value
- قيمة صغرى Minimum Value

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلى
- برامج رسومية

فكر و ناقش



تعتمد الموجات فوق الصوتية على ترددات عالية تختلف فى طول الموجة. كما تستخدم فى التصوير الطبى، وتستخدمها الغواصات كجهاز رادار يعمل فى أعماق المحيطات .وعند تمثيل هذه الموجات بمخططات بيانية لتعرف خواص دالة الجيب وجيب التمام قم أنت وزملاؤك بالأعمال التعاونية التالية:

التمثيل البيانى لدالة الجيب Represent sine function graphically

عمل تعاونى

١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

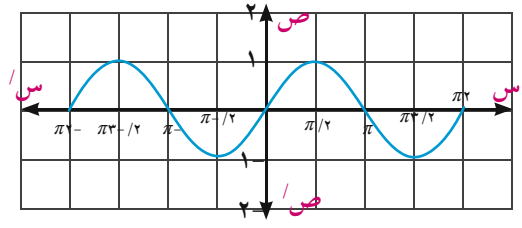
θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi٣}{٦}$	$\frac{\pi٥}{٦}$	π	$\frac{\pi٧}{٦}$	$\frac{\pi٩}{٦}$	$\frac{\pi١١}{٦}$	$\pi٢$
جا θ	٠	٠,٥							

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولا آخر مستخدما قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



٦ هل لاحظت وجود قيم عُظمى أو قيم صُغرى لهذا المنحنى. فسِّر إجابتك؟

تعلم

خواص دالة الجيب
Properties of the sine function

فى الدالة د حيث د(θ) = جا θ فإن:

★ مجال دالة الجيب هو]−∞، ∞[، ومداها [−١، ١]

★ دالة الجيب دالة دورية ذات دورة π٢ أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة [٠، π٢] إلى اليمين أو اليسار π٢ وحدة، π٤ وحدة، π٦ وحدة، ... وهكذا.

★ القيمة العظمى لدالة الجيب تساوى ١ وتحدث عند النقاط $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢$ ن π ن ∈ صـ

★ القيمة الصغرى لدالة الجيب تساوى −١ وتحدث عند النقاط $\theta = \frac{\pi٣}{٢} + ٢$ ن π ن ∈ صـ

التمثيل البيانى لدالة جيب التمام
Represent cosine function graphically

عمل تعاونى

١ أكمل الجدول التالى بالاشتراك مع زملائك:

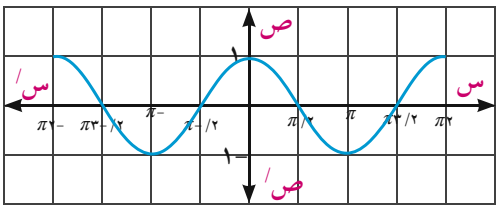
θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi٣}{٦}$	$\frac{\pi٥}{٦}$	π	$\frac{\pi٧}{٦}$	$\frac{\pi٩}{٦}$	$\frac{\pi١١}{٦}$	π ٢
جتا θ	١	٠,٨							

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولًا آخر مستخدمًا قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حَصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



تعلم

خواص دالة جيب التمام
Properties of cosine function

في الدالة د حيث د(θ) = جتا θ فإن:

★ مجال دالة جيب التمام هو]−∞، ∞[، ومداها [−١، ١]

★ دالة جيب التمام دورية ذات دورة π٢، أى أنه يمكن إزاحة المنحنى فى الفترة [٠، π٢] إلى اليمين أو اليسار π٢ وحدة، π٤ وحدة ، π٦ وحدة ، ... وهكذا.

★ القيمة العظمى لدالة جيب التمام تساوى ١ وتحدث عند النقاط $\theta = \pm ٢\pi$ ن ن ∈ صـ

★ القيمة الصغرى لدالة جيب التمام تساوى - ١ وتحدث عند النقاط $\theta = \pi \pm ٢\pi$ن ن ∈ صـ

مثال

① **الربط بالفيزياء:** يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعًا نتيجة حركة المد والجذر، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار، وكانت حركة المد والجذر فى ذلك اليوم تخضع للعلاقة ف = ٦ جا (١٥ ن°) + ١٠ حيث ن هو الزمن الذى ينقضى بعد منتصف الليل بالساعات تبعًا لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة. أوجد عدد المرات التى يبلغ فيها عمق المياه فى الميناء ١٠ أمتار تمامًا.
ارسم مخططًا بيانيًا يبين كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجذر أثناء اليوم.

الحل

العلاقة بين الزمن (ن) بالساعات وعمق المياه (ف) بالأمتار هى

من العلاقة: ف = ٦ جا (١٥ ن°) + ١٠

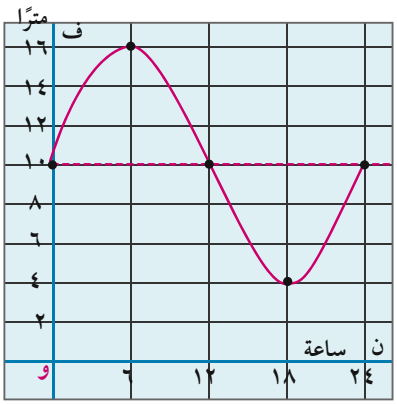
عندما ن = ٠ ف = ٦ جا (١٥ × ٠) + ١٠ = ٦ جا ٠ + ١٠ = ١٠

عندما ن = ٦ ف = ٦ جا (١٥ × ٦) + ١٠ = ٦ جا ٩٠° + ١٠ = ١٦

عندما ن = ١٢ ف = ٦ جا (١٥ × ١٢) + ١٠ = ٦ جا ١٨٠° + ١٠ = ١٠

عندما ن = ١٨ ف = ٦ جا (١٥ × ١٨) + ١٠ = ٦ جا ٢٧٠° + ١٠ = ٤

عندما ن = ٢٤ ف = ٦ جا (١٥ × ٢٤) + ١٠ = ٦ جا ٣٦٠° + ١٠ = ١٠



ن الساعات	٠	٦	١٢	١٨	٢٤
ف بالأمتار	١٠	١٦	١٠	٤	١٠

من الجدول نجد أن: عمق المياه تبلغ ١٠ أمتار

عندما ن = ١٠، ١٢، ٢٤ ساعة

حاول أن تحل

① فى المثال السابق أوجد عدد الساعات خلال اليوم التى تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء؟

تحقق من فهمك

① ارسم منحنى الدالة ص = ٣جاس حيث س ∈ [٠، ٢π]

② ارسم منحنى الدالة ص = ٢جتاس حيث س ∈ [٠، ٢π]

٦ - ٤ إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية

Finding the Measure of an Angle Given the value of one of its Functions

سوف تتعلم

- إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة مثلثية.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- دالة مثلثية.
 Trigonometric Function

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

فكر و ناقش

علمت أنه إذا كانت ص = جا θ فإنه يمكن إيجاد قيمة ص بمعلومية الزاوية θ، وعندما تعطى قيمة ص فهل يمكنك إيجاد قيمة θ ؟

تعلم

إذا كانت ص = جا θ **فإن** θ = جا$^{-1}$ ص

فمثلًا إذا كانت θ زاوية حادة موجبة وكانت ص = $\frac{1}{2}$

فتكتب هذه العلاقة بالصورة θ = جا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ = ٣٠°

مثال

(١) أوجد و$(\measuredangle\theta)$ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° والتى تحقق كلًّا مما يأتى:

أ جا$^{-1}$ ٠,٦٣٢٥ ب ظتا$^{-1}$ (– ١,٦٢٠٤)

الحل

أ ∵ جيب الزاوية > ٠

∴ الزاوية تقع فى الربع الأول أو الثانى.

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ ← SHIFT sin^{-1} 0 . 6 3 2 5 = °‴

الربع الأول: و$(\measuredangle\theta)$ = ٣٩° ١٤′ ٦″

الربع الثانى: و$(\measuredangle\theta)$ = ١٨٠° – ٣٩° ١٤′ ٦″ = ١٤٠° ٤٥′ ٥٤″

ب ∵ ظل تمام الزاوية > ٠

∴ الزاوية تقع فى الربع الثانى أو الرابع:

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ ← SHIFT tan^{-1} 1 . 6 2 0 4 x^{-1} = °‴

الربع الثانى: و$(\measuredangle\theta)$ = ١٨٠° – ٣١° ٤٠′ ٤٨″ = ١٤٨° ١٩′ ١٢″

الربع الرابع: $\text{و}(\measuredangle\theta) = ٣٦٠^\circ - ٤٨'\ ٤٠''\ ٣١^\circ = ١٢''\ ١٩'\ ٣٢٨^\circ$

هل يمكنك التحقق من صحة الحل باستخدام الآلة الحاسبة؟

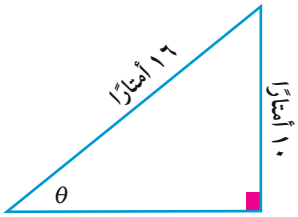
حاول أن تحل

(١) أوجد $\text{و}(\measuredangle\theta)$ حيث $٠ < \theta < ٣٦٠^\circ$ والتى تحقق كلًّا مما يأتى:

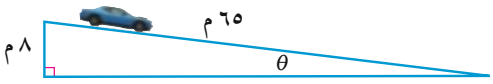
أ) $\text{جتا}^{-١}\ ٠,٦٢٠٥$ ب) $\text{ظا}^{-١}\ (-٢,٣٦١٥)$ ج) $\text{قتا}^{-١}\ (-٢,١٠٣٦)$

تحقق من فهمك

(١) **الربط بالرياضة:** توجد لعبة التزحلق فى مدينة الألعاب، فإذا كان ارتفاع إحدى اللعبات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما فى الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية θ ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات. لأقرب جزء من ألف.



(٢) **سيارات:** يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ متر وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى زاوية قياسها θ . أوجد $\text{و}(\measuredangle\theta)$ بالتقدير الستينى.



(٣) **اكتشف الخطأ:** بسبب الرياح انكسرت نخلة طولها ٢٠ مترًا، بحيث تأخذ الشكل المجاور، فإذا كان طول الجزء الرأسى منها ٧ أمتار، والجزء المائل ١٣ مترًا وكانت θ هى الزاوية التى يصنعها الجزء المائل مع الأفقى. فأوجد قياس θ.



إجابة كريم

$\because \text{قتا}\,\theta = \frac{١٣}{٧}$ $\therefore \theta = \text{قتا}^{-١}\frac{١٣}{٧}$

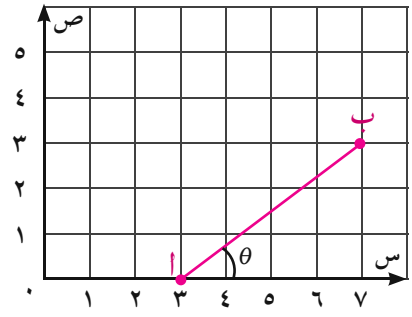
$\therefore \text{و}(\measuredangle\theta) = ٣٢^\circ\ ٣٤'\ ٤٤''$

إجابة عمر

$\because \text{قا}\,\theta = \frac{١٣}{٧}$ $\therefore \theta = \text{قا}^{-١}\frac{١٣}{٧}$

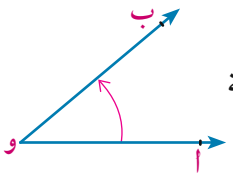
$\therefore \text{و}(\measuredangle\theta) = ٥٧^\circ\ ٢٥'\ ١٦''$

(٤) **التفكير الناقد:** الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين أ(٣، ٠)، ب (٧، ٣) أوجد قياس الزاوية θ المحصورة بين $\overline{\text{أب}}$ ومحور السينات.

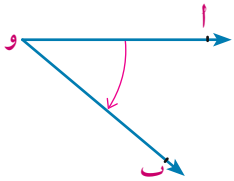


ملخص الوحدة

١ **الزاوية الموجهة:** هى زوج مرتب من شعاعين ($\overrightarrow{و\,أ}$ ، $\overrightarrow{و\,ب}$) هما ضلعا الزاوية، لهما نقطةبداية واحدة هى رأس الزاوية، ويسمى $\overrightarrow{و\,أ}$ الضلع الابتدائى، $\overrightarrow{و\,ب}$ الضلع النهائي للزاوية:



قياس موجب
ضد اتجاه حركة
عقارب الساعة



قياس سالب
مع اتجاه حركة
عقارب الساعة

٢ **الوضع القياسى للزاوية:** فى نظام إحداثى متعامد تكون رأس الزاوية هى نقطة الأصل، وضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحورالسينات .

٣ **الزوايا المتكافئة:** هى الزوايا التى قياساتها على الصورة ($\theta \pm$ ن × ٣٦٠°) حيث ن ∈ صـ يكون لها نفس الضلع النهائى.

٤ **الزاوية النصف قطرية:** هى الزاوية المركزية فى الدائرة وتقابل قوسًا طوله يساوى طول نصف قطر الدائرة.

٥ **العلاقة بين القياس الستينى والدائرى:** إذا كانت لدينا زاوية قياسها الستينى يساوى س° وقياسها الدائرى يساوى $\theta^{ك}$ فإن:

$$\theta^{ك} = \text{س}^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \quad ، \quad \text{س}^\circ = \theta^{ك} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi}$$

٦ **طول القوس:** إذا كان $\theta^{ك}$ هى الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها ﻫ تقابل قوسًا من الدائرة طوله ل فإن: ل = $\theta^{ك}$ × ﻫ

٧ **الزاوية الربعية:** هي زاوية في الوضع القياسى، بحيث يقع ضلعها النهائى على أحد المحورين س أو ص.

٨ **دائرة الوحدة:** هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثى، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

٩ **النسبة المثلثية:** هى نسبة بين طولى ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية.

١٠ **اشارات الدوال المثلثية:**

لاحظ أن:			
الربع الأول:	**الربع الثانى:**	**الربع الثالث:**	**الربع الرابع:**
$٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$	$٩٠^\circ < \theta < ١٨٠^\circ$	$١٨٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$	$٢٧٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$
كل الدوال المثلية موجبة	جا θ، قتا θ موجبتان وباقي الدوال سالبة.	ظا θ، ظتا θ موجبتان وباقي الدوال سالبة.	جتا θ، قا θ موجبتان وباقي الدوال سالبة.

ملخص الوحدة

١١ الدوال المثلثية للزاويا التى قياساتها:

أولاً: $(\theta - ١٨٠^\circ)$

$جا(\theta - ١٨٠^\circ) = -جا\theta$ ، $قتا(\theta - ١٨٠^\circ) = -قتا\theta$

$جتا(\theta - ١٨٠^\circ) = -جتا\theta$ ، $قا(\theta - ١٨٠^\circ) = -قا\theta$

$ظا(\theta - ١٨٠^\circ) = -ظا\theta$ ، $ظتا(\theta - ١٨٠^\circ) = -ظتا\theta$

ثانيًا: $(\theta + ١٨٠^\circ)$

$جا(\theta + ١٨٠^\circ) = -جا\theta$ ، $قتا(\theta + ١٨٠^\circ) = -قتا\theta$

$جتا(\theta + ١٨٠^\circ) = -جتا\theta$ ، $قا(\theta + ١٨٠^\circ) = -قا\theta$

$ظا(\theta + ١٨٠^\circ) = ظا\theta$ ، $ظتا(\theta + ١٨٠^\circ) = ظتا\theta$

ثالثًا: $(\theta - ٣٦٠^\circ)$

$جا(\theta - ٣٦٠^\circ) = -جا\theta$ ، $قتا(\theta - ٣٦٠^\circ) = -قتا\theta$

$جتا(\theta - ٣٦٠^\circ) = جتا\theta$ ، $قا(\theta - ٣٦٠^\circ) = قا\theta$

$ظا(\theta - ٣٦٠^\circ) = -ظا\theta$ ، $ظتا(\theta - ٣٦٠^\circ) = -ظتا\theta$

رابعًا: $(\theta - ٩٠^\circ)$

$جا(\theta - ٩٠^\circ) = جتا\theta$ ، $قتا(\theta - ٩٠^\circ) = قا\theta$

$جتا(\theta - ٩٠^\circ) = جا\theta$ ، $قا(\theta - ٩٠^\circ) = قتا\theta$

$ظا(\theta - ٩٠^\circ) = ظتا\theta$ ، $ظتا(\theta - ٩٠^\circ) = ظا\theta$

خامسًا: $(\theta + ٩٠^\circ)$

$جا(\theta + ٩٠^\circ) = جتا\theta$ ، $قتا(\theta + ٩٠^\circ) = قا\theta$

$جتا(\theta + ٩٠^\circ) = -جا\theta$ ، $قا(\theta + ٩٠^\circ) = -قتا\theta$

$ظا(\theta + ٩٠^\circ) = -ظتا\theta$ ، $ظتا(\theta + ٩٠^\circ) = -ظا\theta$

سادسًا: $(\theta - ٢٧٠^\circ)$

$جا(\theta - ٢٧٠^\circ) = -جتا\theta$ ، $قتا(\theta - ٢٧٠^\circ) = -قا\theta$

$جتا(\theta - ٢٧٠^\circ) = -جا\theta$ ، $قا(\theta - ٢٧٠^\circ) = -قتا\theta$

$ظا(\theta - ٢٧٠^\circ) = ظتا\theta$ ، $ظتا(\theta - ٢٧٠^\circ) = ظا\theta$

سابعًا: $(\theta + ٢٧٠^\circ)$

$جا(\theta + ٢٧٠^\circ) = -جتا\theta$ ، $قتا(\theta + ٢٧٠^\circ) = -قا\theta$

$جتا(\theta + ٢٧٠^\circ) = جا\theta$ ، $قا(\theta + ٢٧٠^\circ) = قتا\theta$

$ظا(\theta + ٢٧٠^\circ) = -ظتا\theta$ ، $ظتا(\theta + ٢٧٠^\circ) = -ظا\theta$

١٢ خواص كل من دالتى الجيب وجيب التمام

الخاصية	دالة الجيب $د(\theta) = جا\theta$	دالة جيب التمام $د(\theta) = جتا\theta$
المجال والمدى	المجال هو $]-\infty, \infty[$ ، المدى هو $[-١، ١]$	المجال هو $]-\infty, \infty[$ ، المدى هو $[-١, ١]$
القيمة العظمى	تساوى ١ عند $س = \frac{\pi}{٢} + ٢ن\pi$ ، $ن \in ص$	تساوى ١ عند $س = \pm ٢ن\pi$ ، $ن \in ص$
القيمة الصغرى	تساوى -١ عند $س = \frac{\pi ٣}{٢} + ٢ن\pi$ ، $ن \in ص$	تساوى -١ عند $س = \pi \pm ن\pi$ ، $ن \in ص$

١٣ إذا قطع الضلع النهائى للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسى دائرة الوحدة في النقطة ب$(س، ص)$ فإن $س = جتا\theta$ ، $ص = جا\theta$ وتعرف بالدوال الدائرية.

١٤ إذا كانت $ص = جا\theta$ فإن $\theta = جا^{-١} ص$.

الرياضيات

كتاب الطالب

الصف الأول الثانوى — الفصل الدراسى الأول

- إن التنافس مع الذات هو أفضل تنافس.
- من وثق بالله أغناه ومن توكل عليه كفاه.
- من يعش فى خوف، فلن يكون حرًا أبدًا.
- امدح صديقك علنًا وعاتبه سرًا.
- اختر كلماتك قبل أن تتحدث.
- الشعوب وحدها هى القادرة على تحرير نفسها وتحقيق أحلامها.

